

METODE NUMERICE

Curs + Aplicații

1. METODE NUMERICE DE REZOLVARE A ECUAȚIILOR ALGEBRICE

În practica inginerescă se întâlnesc adeseori situații în care este necesară rezolvarea unor ecuații algebrice polinomiale sau transcendente cu o singură variabilă, ale căror soluții nu se pot obține pe cale analitică, prin metodele cunoscute în algebră. Pentru rezolvarea unor asemenea ecuații se folosesc metode numerice de calcul aproximativ care permit calculul rădăcinilor cu o precizie suficientă unui calcul ingineresc obișnuit.

Fie o ecuație algebrică de forma $f(x) = 0$. Condiția necesară și suficientă pentru ca acesta să aibă o singură soluție în intervalul $[a, b]$ este ca funcția $f(x)$ să fie continuă, strict monotonă și să prezinte o schimbare de semn pe intervalul $[a, b]$, deci $f(x)$ trebuie să îndeplinească condițiile:

1. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ să fie o funcție Rolle, continuă și derivabilă în intervalul $[a, b]$ cu $f'(x) > 0$ sau $f'(x) < 0$;
2. $f(a) \times f(b) < 0 \Leftrightarrow f(a) < 0, f(b) > 0$ sau $f(a) > 0, f(b) < 0$;

Cele mai utilizate metode numerice aproximative pentru determinarea soluțiilor unei ecuații algebrice sunt:

1. metoda înjumătățirii intervalului (biseecției);
2. metoda coardei (secantei);
3. metoda tangentelor de ordinul I a lui Newton (Newton- Raphson);
4. metoda tangentelor de ordinul II a lui Newton;
5. metoda iterativă pentru ecuații de forma $x=g(x)$.

Un caz particular de aplicare a metodelor lui Newton îl constituie extragerea rădăcinii de ordinul k dintr-un număr pozitiv N .

1.1. Metoda înjumătățirii intervalului (biseecției)

Este cea mai simplă și intuitivă metodă numerică pentru determinarea rădăcinii unei ecuații algebrice de forma $f(x) = 0$, rădăcină află în intervalul (a,b) .

Condițiile necesare pentru a putea aplica această metodă sunt:

- 1- $f(x)$ să fie o funcție continuă, derivabilă și strict monotonă în intervalul $[a, b]$;
- 2-funcția să prezinte o variație de semn în intervalul $[a, b]$, adică $f(a) \times f(b) < 0$ (1.1)

Metoda se bazează pe următorul algoritm:

1. se calculează valorile funcției $f(x)$ în trei puncte: la capetele intervalului a, b și la mijlocul distanței: $c = (a + b) / 2$ și se verifică semnele;
2. se calculează din nou valorile funcției $f(x)$ pentru subintervalul pentru care funcția prezintă variație de semn în trei puncte: la capetele intervalului respectiv la mijlocul distanței;

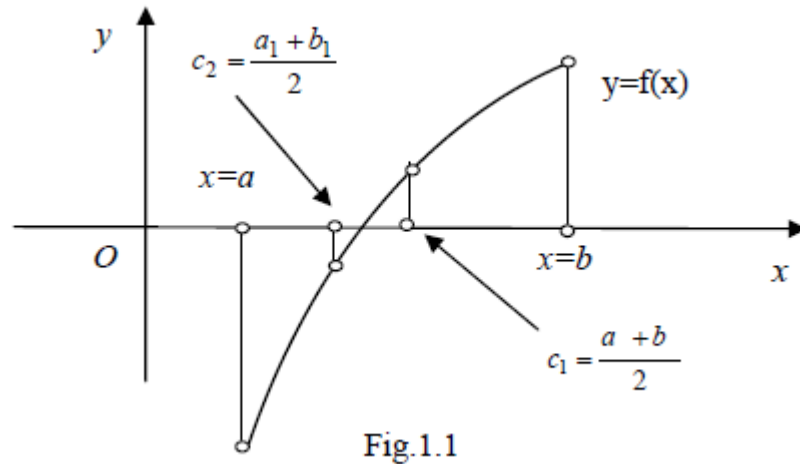
3. se repetă algoritmul până când se obține o lungime pentru ultimul subinterval mai mică decât eroarea cerută pentru calculul rădăcinii: $\varepsilon = x_{n+1} - x_n$

Sunt posibile următoarele patru cazuri prezentate în tabelul 1.1:

Tabelul 1.1

Caz	$f(a)$	$f(c)$	$f(b)$	Rădăcina ξ
1	-	+	+	$\xi \in (a, c)$
2	-	-	+	$\xi \in (c, b)$
3	+	+	-	$\xi \in (c, b)$
4	+	-	-	$\xi \in (a, c)$

În figura 1.1 este prezentat graficul unei funcții ce corespunde cazului 1 și apoi cazului 2 prezentate în tabelul 1.1.



Aplicația 1.1

Folosind metoda biseției să se afle rădăcina ecuației algebrice transcendente:

$\ln x + 3x^2 - 4x - 1 = 0$, cu o eroare $\varepsilon < 10^{-5}$ (cu cinci zecimale exacte), știind că această rădăcină se află în intervalul $[1, 2]$.

Rezolvare: Pentru determinarea soluției ecuației date se aplică algoritmul prezentat mai sus obținându-se valorile din tabelul 1.2.

Tabelul 1.2

n	a_n	c_n	b_n	$f(a)$	$f(c)$	$f(b)$	Eroarea ε
1	1	1,5	2	-2	0,155465	3,693	1
2	1	1,25	1,5	-2	-1,089	0,155465	0,25
3	1,25	1,375	1,5	-1,089	-0,50967	0,155465	0,125
4	1,375	1,4375	1,5	-0,50967	-0,1878	0,155465	0,0625
5	1,4375	1,46875	1,5	-0,1878	-0,0189	0,155465	0,03125
6	1,46875	1,484375	1,5	-0,0189	0,0676	0,155465	0,015625
7	1,46875	1,4765625	1,484375	-0,0189	0,0241772	0,0676	0,0078125
8	1,46875	1,472656	1,476562	-0,0189	0,002592	0,024177	0,0039
9	1,46875	1,470703	1,472656	-0,0189	-0,00817	0,002592	0,0019
10	1,470703	1,471680	1,472656	-0,008169	-0,00279	0,002592	-0,00097
11	1,471680	1,472168	1,472656	-0,00279	-0,0001	0,002592	-0,00098
12	1,472168	1,472412	1,472656	-0,0001	0,0012	0,002592	0,000244
13	1,472168	1,472290	1,472412	-0,0001	0,0005	0,0012	0,00012
14	1,472168	1,472229	1,472290	-0,0001	0,0002	0,0005	0,00006
15	1,472168	1,472198	1,472229	-0,0001	0,00007	0,0002	0,00003
16	1,472168	1,472183	1,472198	-0,0001	-0,00001	0,00007	0,000015

Metoda biseecției este *slab convergentă*. Soluția aproximativă a ecuației este $\xi=1,472183$ calculată cu o eroare $\varepsilon < 10^{-5}$ după șaisprezece pași.

1.2. Metoda coardei (secantei)

Se consideră o funcție $f(x)$ continuă și derivabilă pe intervalul $[a, b]$ astfel încât își modifică semnul, adică este îndeplinită condiția $f(a) \times f(b) < 0$. Fără a limita generalitatea metodei presupunem că ecuația $f(x)=0$ are o singură rădăcină $\xi \in (a,b)$ ca în figura 1.2 (cu $f(a)<0$ și $f(b)>0$).

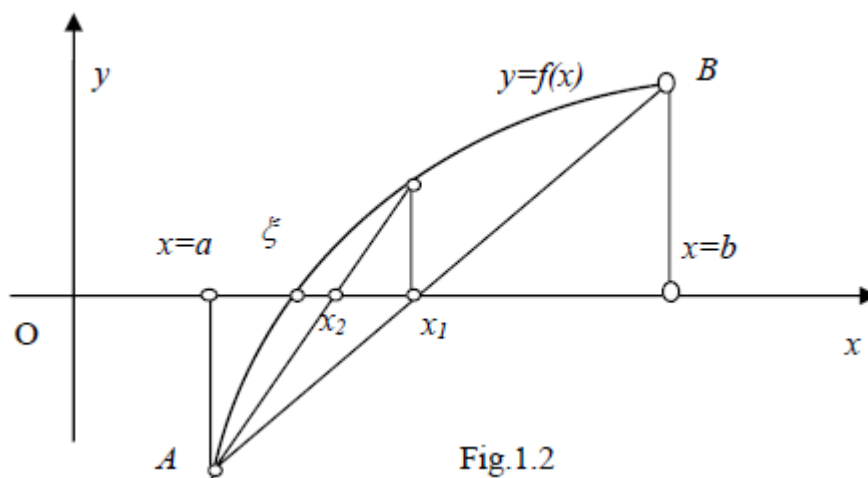


Fig.1.2

În primă fază, se poate aproxima rădăcina ecuației $f(x)=0$ cu punctul de intersecție cu axa Ox a dreptei care trece prin punctele $A(a, f(a))$ și $B(b, f(b))$ de ecuație:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{x-a}{b-a} \Leftrightarrow y-f(a) = (x-a) \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad (1.3)$$

Punctul de intersecție al dreptei cu axa Ox se obține introducând condiția $y=0$ în ecuația (1.3). Se obține:

$$x_1 = a - f(a) \frac{b-a}{f(b)-f(a)} \quad (1.4)$$

Din figura 1.3 rezultă că noul subinterval al rădăcinii ξ este (a, x_1) deoarece $f(a) \times f(x_1) < 0$. În continuare algoritmul se repetă.

Presupunem că ultimul subinterval pentru care funcția își modifică semnul este (x_{n-1}, x_n) , adică este îndeplinită condiția: $f(x_{n-1}) \times f(x_n) < 0$ (1.5)

Ținând seama de relația (1.4) se poate scrie următoarea *relație de recurență a metodei coardei sau secantei*:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (1.6)$$

Aplicația 1.2

Folosind metoda coardei să se determine rădăcina ecuației algebrice: $\ln x + 3x^2 - 4x - 1 = 0$, cu o eroare $\varepsilon < 10^{-5}$ (cu cinci zecimale exacte) știind că se află în intervalul $[1, 2]$.

Rezolvare

Pentru calculul soluției ecuației se aplică relația de recurență (1.6) care conduce la obținerea valorilor din tabelul 1.3.

Tabelul 1.3

Pas	x_{n-1}	x_{n+1}	x_n	$f(x_{n-1})$	$f(x_{n+1})$	$f(x_n)$	Eroarea ε
1	1.000000	1.351300	2	-2.000000	-0.626100	3.693147	
2	1.351300	1.445332	2	-0.626100	-0.146033	3.693147	0,09432
3	1.445332	1.466431	2	-0.146033	-0.031635	3.693147	0,021099
4	1.466431	1.470962	2	-0.031635	-0.006742	3.693147	0,004531
5	1.470962	1.471926	2	-0.006742	-0.001432	3.693147	0,000964
6	1.471926	1.472131	2	-0.001432	-0.000304	3.693147	0,000205
7	1.472131	1.472174	2	-0.000304	-0.000064	3.693147	0,000043
8	1.472174	1.472184	2	-0.000064	-0.000014	3.693147	0,000010
9	1.472184	1.472186	2	-0.000014	-0.0000007	3.693147	0,000002
10	1.472186	1.472188	2	-0.0000007	0,00001	3.693147	0,000002

Metoda coardei este *slab convergentă*. Soluția aproximativă a ecuației calculată cu o eroare $\varepsilon = 10^{-5}$ în zece pași este: $\xi = 1,472184$.

1.3. Metoda tangentelor de ordinul I a lui Newton (Newton-Raphson)

Metoda tangentelor de ordinul I a lui Newton este o metodă ce permite calculul aproximativ al soluției unei ecuații algebrice $f(x)=0$ cu ajutorul tangentei la graficul funcției $f(x)$ în punctul x_n .

Se consideră funcția $f(x)$ care îndeplinește următoarele condiții: este continuă și derivabilă pe intervalul $[a, b]$, își schimbă semnul: $f(a) \times f(b) < 0$, este strict monotonă ($f'(x) > 0$ sau $f'(x) < 0$) și graficul ei nu admite nici un punct de inflexiune pe intervalul $[a, b]$: $f''(x) \neq 0$. În aceste condiții funcția admite o singură rădăcină în intervalul $[a, b]$ și se poate aplica metoda tangentelor de ordinul I a lui Newton.

Prin dezvoltarea în serie Taylor a funcției $f(x)$ în jurul punctului $x=a$ se obține:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \dots \quad (1.7)$$

Reținând doar primii doi termeni ai acestei dezvoltări, se obține ecuația unei drepte care reprezintă tangenta la graficul funcției în punctul A, așa cum rezultă și din figura 1.3:

$$y_1 = f(a) + (x-a) f'(a) \quad (1.8)$$

Dacă în ecuația (1.8) se pune condiția $y_1 = 0$, se obține punctul de intersecție al tangentei cu axa Ox:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \quad (19)$$

Prin dezvoltarea în serie Taylor a funcției $f(x)$ în jurul punctului $x=b$ și reținerea primilor doi termeni se obține tangenta la graficul lui $f(x)$ în punctul B, care intersectează axa Ox în punctul x_2 (fig. 1.3):

$$x_2 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \quad (20)$$

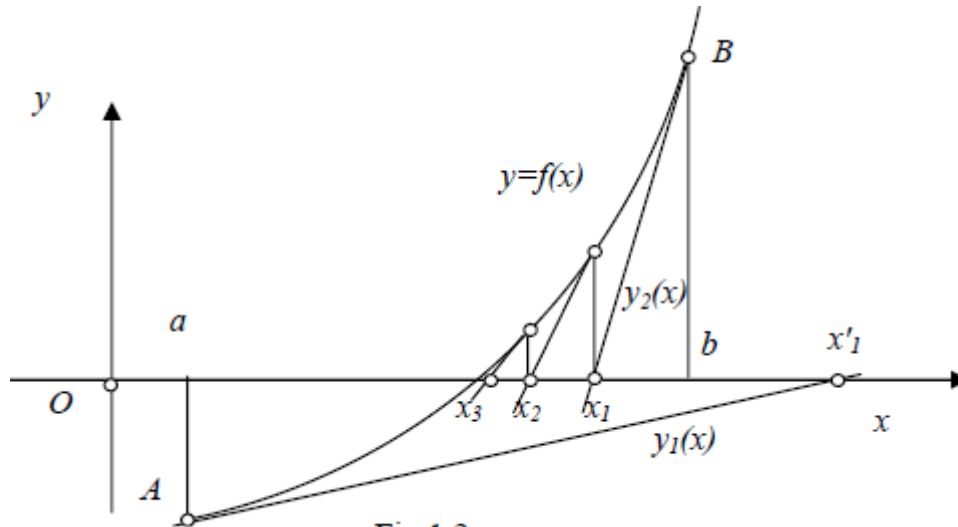


Fig.1.3

Ținând seama de relațiile (1.9) și (1.10) rezultă formula de recurență a metodei tangentelor de ordinul I a lui Newton (Newton-Raphson):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (1.11)$$

Observații

1. Alegerea punctului de start pentru aplicarea metodei tangentelor este importantă întrucât soluțiile corespunzătoare celor n iterații trebuie să fie convergente către soluția exactă, adică în interiorul intervalului (a, b) . Se observă din figura 1.3 că valorile $x_1, x_2, \dots$ corespunzătoare punctului de start $x=b$ se află în interiorul intervalului în timp ce prima valoare x'_1 corespunzătoare punctului de start $x=a$ se află în afara lui.
2. Dacă prima derivată a funcției se anulează în interiorul intervalului (a, b) , (sau nu este strict pozitivă sau negativă) metoda nu este convergentă așa cum se poate observa în exemplul din figura 1.4.

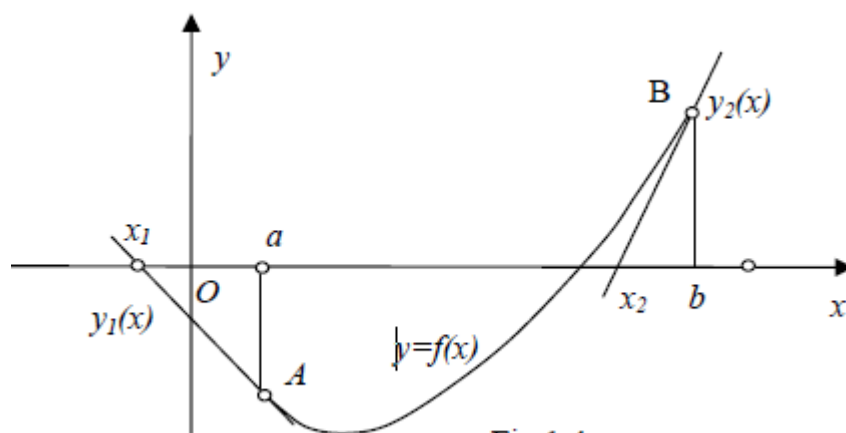


Fig.1.4

3. În cazul în care a doua derivată a funcției se anulează în interiorul intervalului (a, b) , graficul funcției admite un punct de inflexiune în interiorul intervalului (a, b) și metoda nu este convergentă așa cum se poate observa în exemplul din figura 1.5.

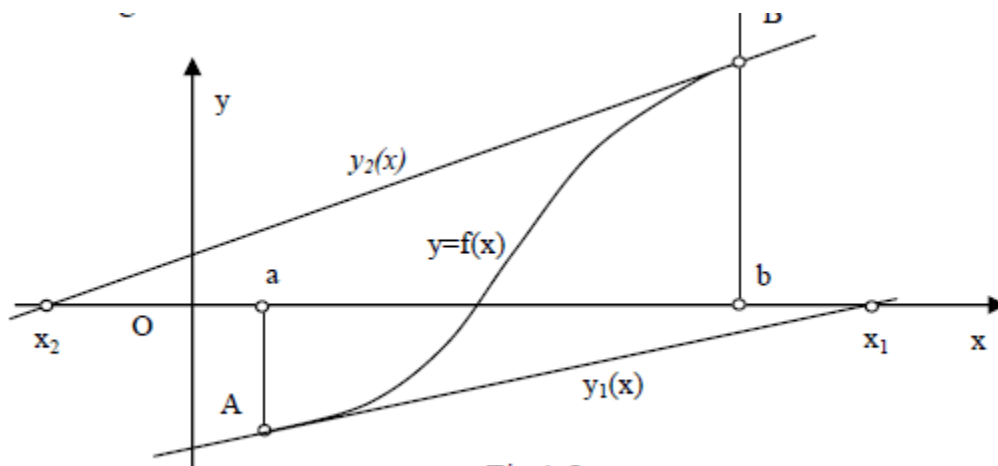


Fig.1.5

Aplicația 1.3

Folosind metoda tangentelor de ordinul I a lui Newton să se determine rădăcina ecuației algebrice: $\ln x + 3x^2 - 4x - 1 = 0$, cu o eroare $\varepsilon < 10^{-5}$ (cu șase zecimale, ultima fiind rotunjită) știind că se află în intervalul $[1, 2]$.

Rezolvare

Notând $f(x) = \ln x + 3x^2 - 4x - 1$, atunci derivatele lui $f(x)$ sunt:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 6x - 4 \text{ și } f''(x) = -\frac{1}{x^2} + 6 \quad (1.12)$$

Se observă că în intervalul $[1, 2]$ sunt îndeplinite condițiile cerute:

$$f'(x) > 0 \text{ și } f''(x) \neq 0 \quad (1.13)$$

Pentru determinarea soluției aproximative se aplică relația de recurență (1.11) luând ca punct de start $x=2$, obținându-se valorile din tabelul 1.4.

Tabelul 1.4

Pas	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}	$f(x_{n+1})$	Eroarea ε
1.	2	3.693147	8.5	1.565512	0.538649	0.434488
2.	1.565512	0.538649	6.031841	1.476211	0.022232	0.089301
3.	1.476211	0.022232	5.534677	1.472194	4.47E-05	0.004017
4.	1.472194	4.47E-05	5.512424	1.472186	1.82E-10	0.000008

Se observă din tabelul 1.4 că această metodă este *rapid convergentă*.

Soluția aproximativă a ecuației calculată cu șase zecimale exacte este $\xi = 1,472186$.

1.4. Metoda tangentelor de ordinul II a lui Newton

Se consideră funcția $f(x)$ care îndeplinește următoarele condiții: este continuă și derivabilă pe intervalul $[a, b]$, își schimbă semnul: $f(a) \times f(b) < 0$, este strict monotonă ($f'(x) > 0$ sau $f'(x) < 0$) și graficul ei nu admite nici un punct de inflexiune pe intervalul $[a, b]$: $f''(x) \neq 0$. În aceste condiții funcția admite o singură rădăcină în intervalul $[a, b]$ și se poate aplica metoda tangentelor de ordinul II a lui Newton.

Prin dezvoltarea (1.7) în *serie Taylor* a funcției $f(x)$ în jurul punctului $x=a$ se rețin doar primii trei termeni ai acestei dezvoltări, se obține ecuația unei parabole

$$y = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) \quad (1.14)$$

Se observă din relația (1.14) că funcția $y(x)$ trece prin punctul $A(a, f(a))$ și are aceeași derivate cu $f(x)$ în punctul $x=a$: $y'(a) = f'(a)$ respectiv $y''(a) = f''(a)$:

Punând condiția $y = 0$ în ecuația (1.14), se obține ecuația:

$$f(a) + (x-a) \left[f'(a) + \frac{(x-a)}{2!} f''(a) \right] = 0 \quad (1.15)$$

Înlocuind expresia $(x-a)$ din interiorul parantezei drepte cu expresia obținută în cadrul metodei Newton Raphson:

$$x - a = -\frac{f(a)}{f'(a)} \quad (1.16)$$

se obține ecuația:

$$f(a) + (x - a) \left[f'(a) - \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} f'(a) \right] = 0 \quad (1.17)$$

Soluția ecuației (1.17) este dată de relația:

$$x = a - \frac{1}{\frac{f'(a)}{f(a)} - \frac{f''(a)}{2 \cdot f'(a)}} \quad (1.18)$$

Dacă această soluție este în afara intervalului (a,b) atunci se schimbă punctul de start al metodei în $x=b$, ca la metoda tangentelor de ordinul I:

$$x = b - \frac{1}{\frac{f'(b)}{f(b)} - \frac{f''(b)}{2 \cdot f'(b)}} \quad (1.19)$$

Ținând seama de relațiile (1.18) și (1.19) se deduce *relația de recurență a metodei tangentelor de ordinul II a lui Newton*:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{\frac{f'(x_n)}{f(x_n)} - \frac{f''(x_n)}{2 \cdot f'(x_n)}} \quad (1.20)$$

Aplicația 1.4

Folosind metoda tangentelor de ordinul II a lui Newton să se determine rădăcina ecuației algebrice $\ln x + 3x^2 - 4x - 1 = 0$ cu o eroare $\varepsilon < 10^{-5}$ (cu șase zecimale, ultima fiind rotunjită) știind că se află în intervalul [1, 2].

Rezolvare

Pentru a determina rădăcina ecuației $f(x)=0$ prin metoda tangentelor de ordinul II a lui Newton se observă că sunt îndeplinite condițiile cerute și ținând seama de relația (1.12) se aplică relația de recurență (1.20) obținându-se valorile din tabelul 1.5.

Tabelul 1.5

Pas	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f''(x_n)$	x_{n+1}	$f(x_{n+1})$	Eroarea ε
1	2	3.693147	8.5	5.75	1.49066	0.10278	
2	1.49066	0.10278	5.614803	5.549969	1.472188	7.93E-06	0.018472
3	1.472188	7.93E-06	5.512387	5.538604	1.472186	0	0.000002

Se observă că această metodă este *rapid convergentă*.

S-a calculat soluția ecuației este $\xi=1,472186$. cu o eroare $\varepsilon < 10^{-5}$.

1.5. Metoda iterativă $x=g(x)$

Fie o funcție $f(x)$ continuă și derivabilă pe intervalul $[a, b]$, strict monotonă, care îndeplinește condiția $f(a) \times f(b) < 0$. Dacă ecuația $f(x)=0$ are o singură rădăcină $\xi \in (a,b)$ și se poate scrie sub forma echivalentă:

$$x=g(x) \quad (1.21)$$

unde $g(x)$ este o funcție continuă în intervalul (a,b) .

Dacă șirul format cu ajutorul relației (1.21) sub forma relației de recurență:

$$x_{n+1}=g(x_n) \quad (1.22)$$

este convergent, atunci limita acestui șir este tocmai rădăcina ecuației $f(x)=0$

Relația (1.22) reprezintă formula de recurență a metodei $x=g(x)$.

În figura 1.6 sunt prezentate două moduri de obținere grafică a soluțiilor ecuației $f(x)=e^x - 5x=0$ care corespund metodei $x=g(x)$: în prima reprezentare se obțin soluțiile ecuației $f(x)=0$, iar în a doua soluțiile ecuației echivalente: $x= e^x / 5$.

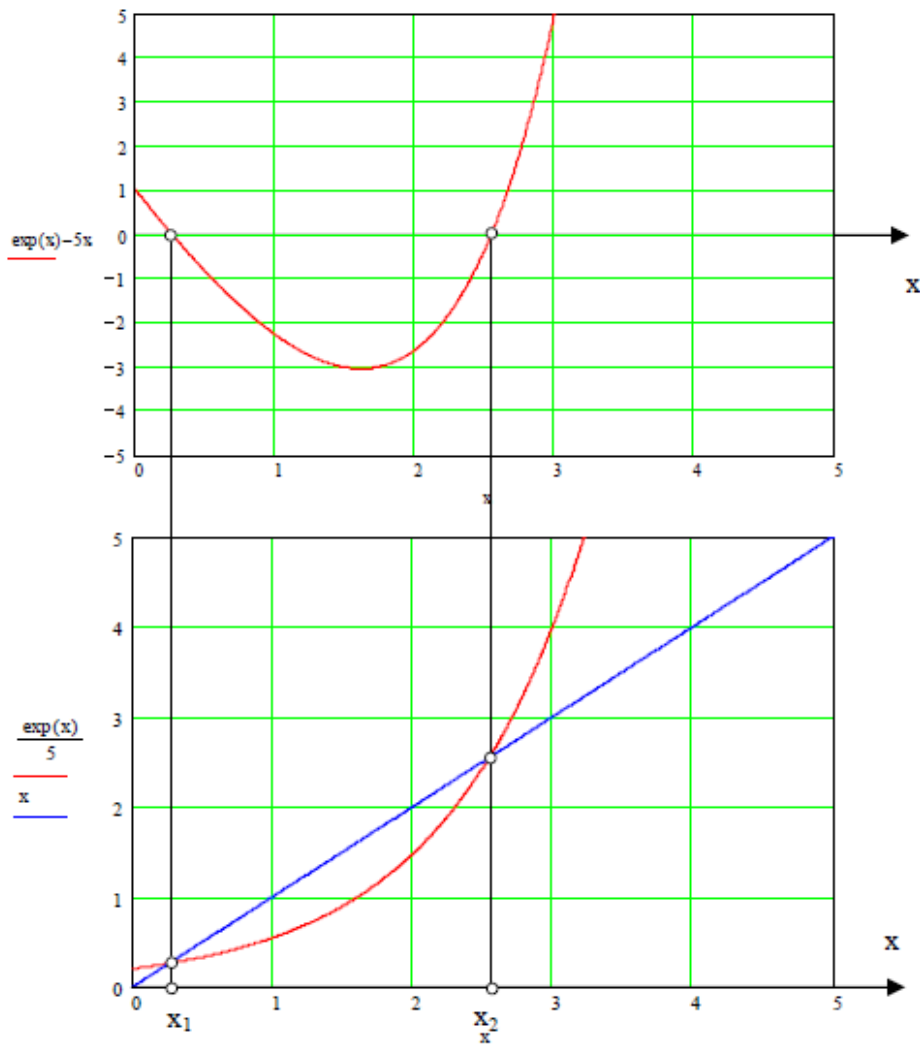


Fig.1.6

Aplicația 1.5

Folosind metoda iterativă pentru ecuații de forma $x=g(x)$ să se găsească rădăcina ecuației: $3x^4 + 4x - 1 = 0$, cu o eroare $\varepsilon < 10^{-5}$ (cu șase zecimale, ultima fiind rotunjită) știind că această rădăcină se află în intervalul $(0, 1)$.

Rezolvare

Ecuația de mai sus se mai scrie sub forma echivalentă $x=g(x)$ astfel:

$$3x^4 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x(3x^3 + 4) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3x^3 + 4} \quad (1.23)$$

Relația de recurență (1.22) pentru acest caz se scrie astfel:

$$x_{n+1} = \frac{1}{3x_n^3 + 4} \quad (1.24)$$

Plecând de la $x_1=0$ și înlocuind în (1.24) se obțin valorile din tabelul 1.6.

Tabelul 1.6

Pas	x_n	x_{n+1}	Eroarea ε
1	0	0,25	0,25
2	0,25	0,2471	0,0029
3	0,2471	0,2472	0,0001
4	0,2472	0,247199	0,000001

Plecând de la $x'_1=1$ și înlocuind în (1.24) se obțin valorile din tabelul 1.7

Tabelul 1.7

Pas	x_n	x_{n+1}	Eroarea ε
1	1	0,142857	0,857143
2	0,142857	0,249454	0,106597
3	0,247123	0,247202	0,002252
4	0,247202	0,247199	0,0000027

Se observă că pentru acest caz metoda este convergentă. O soluție aproximativă a ecuației calculată cu o eroare $\varepsilon < 10^{-5}$ este $\xi=0,247199$.

Aplicația 1.6

Să se găsească rădăcina ecuației: $x^4 - x - 1 = 0$ cu o eroare $\varepsilon < 10^{-5}$, știind că se află în intervalul $(1, 2)$.

Rezolvare

Ecuația $x^4 - x - 1 = 0$ se mai scrie sub forma echivalentă $x=g(x)$ astfel:

$$x^4 = x + 1 \text{ sau: } x = \sqrt[4]{1 + x} \quad (1.25)$$

Relație de recurență corespunzătoare este:

$$x_{n+1} = \sqrt[4]{1 + x_n} \quad (1.26)$$

Plecând de la $x_1=1$ și înlocuind în (1.26) se obțin valorile din tabelul 1.8.

Tabelul 1.8

<i>Pas</i>	x_n	x_{n+1}	<i>Eroarea ε</i>
1	1	1,1892	
2	1,1892	1,21638	0,02718
3	1,21638	1,220145	0,003765
4	1,220145	1,220660	0,000515
5	1,220660	1,220733	0,000073
6	1,220733	1,220742	0,000009
7	1,220742	1,220744	0,000001

Se observă că pentru acest caz metoda este slab convergentă. O soluție aproximativă a ecuației calculată cu o eroare $\varepsilon < 10^{-5}$ este: $\xi = 1,220744$.

1.6. Metoda tangentelor de ordinul I a lui Newton pentru extragerea rădăcinii dintr-un număr pozitiv

Rădăcina de ordinul k dintr-un număr pozitiv N : $x = k^N$ este echivalentă cu soluția ecuației: $f(x) = x^k - N = 0$ (1.27)

Folosind relația de recurență (1.11) de la metoda tangentelor de ordinul I a lui Newton în care se înlocuiește derivata: $f'(x) = kx^{k-1}$, se obține următoarea relație de recurență pentru calculul rădăcinii de ordinul k dintr-un număr N :

$$x_{n+1} = \frac{(k-1)x_n^k + N}{kx_n^{k-1}} \quad \text{sau} \quad x_{n+1} = \frac{1}{k} \left[(k-1)x_n + \frac{N}{x_n^{k-1}} \right] \quad (1.28)$$

Aplicația 1.7

Folosind relația de recurență (1.28) să se calculeze $\sqrt[7]{5}$ ($k=7, N=5$) cu o eroare $\varepsilon < 10^{-5}$.

Rezolvare

Înlocuind $k=7$ și $N=5$ în relația (1.28) se obține relația de recurență:

$$x_{n+1} = \frac{1}{7} \left[6x_n + \frac{5}{x_n^6} \right] \quad (1.29)$$

Dacă se consideră ca punct de start $x_1=1$ se obțin valorile din tabelul 1.9.

Tabelul 1.9

<i>Pas</i>	x_n	x_{n+1}	<i>Eroarea ε</i>
1	1	1,571428	
2	1,571428	1,39437	0,176858
3	1,39437	1,292360	0,102077
4	1,292360	1,261000	0,03136
5	1,261000	1,258514	0,002486
6	1,258514	1,2584989	0,000015

Se observă că metoda este convergentă. După șase pași se obține valoarea aproximativă a rădăcinii $x = 1,2584989$ cu o eroare $\varepsilon < 10^{-5}$.

1.7. Metoda tangentelor de ordinul II a lui Newton pentru extragerea rădăcinii dintr-un număr pozitiv

Ca și în cazul precedent rădăcina $x = k^N$ este echivalentă cu soluția ecuației: $x^k - N = 0$

Folosind relația de recurență (1.20) de la metoda tangentelor de ordinul II a lui Newton și înlocuind expresiile primei și celei de a doua derivate a funcției $f(x) = x^k - N$
 $f'(x) = kx^{k-1}$; $f''(x) = k(k-1)x^{k-2}$ (1.30)

se obține următoarea relație de recurență pentru calculul rădăcinii de ordinul k dintr-un număr N:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n(x_n^k - N)}{(k+1)x_n^k + (k-1)N} \quad (1.31)$$

sau:

$$x_{n+1} = x_n \frac{(k-1)x_n^k + (k+1)N}{(k+1)x_n^k + (k-1)N} \quad (1.32)$$

Aplicația 1.8

Folosind relația de recurență (1.28) să se calculeze $\sqrt[7]{5}$ cu o eroare $\varepsilon < 10^{-7}$.

Rezolvare

Înlocuind $k=7$ și $N=5$ în relația (1.28) se obține relația de recurență:

$$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{3x_n^7 + 20}{4x_n^7 + 15} \quad (1.33)$$

Dacă se consideră ca punct de start $x_1=1$ se obțin valorile din tabelul 1.10.

Tabelul 1.10

<i>Pas</i>	x_n	x_{n+1}	<i>Eroarea</i>
1	1	1,210526	
2	1,210526	1,258205	0,047679
3	1,258205	1,2584989	0,0002939
4	1,2584989	1,2584989	0

Se observă că metoda este rapid convergentă. După patru pași se obține o valoare aproximativă a rădăcinii cu o eroare de $\varepsilon < 10^{-7}$: $x = 1,2584989$.

APLICAȚII.

1. Folosind metoda biseecției să se afle rădăcina ecuației algebrice transcendente:

$x^2 - 5x + 4 = 0$, cu o eroare $\varepsilon < 10^{-3}$ (cu trei zecimale exacte), știind că această rădăcină se află în intervalul (0, 3).

Condițiile necesare pentru a putea aplica această metodă sunt:

1- $f(x)$ să fie o funcție continuă, derivabilă și strict monotonă în intervalul $[a, b]$;

2-funcția să prezinte o variație de semn în intervalul $[a, b]$, adică $f(a) \times f(b) < 0$

Metoda se bazează pe următorul algoritm:

1. se calculează valorile funcției $f(x)$ în trei puncte: la capetele intervalului a, b și la mijlocul distanței: $c = (a + b) / 2$ și se verifică semnele;

2. se calculează din nou valorile funcției $f(x)$ pentru subintervalul pentru care funcția prezintă variație de semn în trei puncte: la capetele intervalului respectiv la mijlocul distanței;

3. se repetă algoritmul până când se obține o lungime pentru ultimul subinterval mai mică decât eroarea cerută pentru calculul rădăcinii: $\varepsilon = x_{n+1} - x_n$

$a = 0; b = 3; c = 1.5$

$f^1(x) = 2x - 5$

$f(a) = f(0) = 4$

$f(b) = f(3) = -2 \quad f(0) \times f(3) = -8 < 0$

$f(c) = f(1.5) = -1.25$

Rădăcina ecuației se află în intervalul (a, c) adică $(0, 1.5)$

$a = 0; b = 1.5; c = 0.75$

$f(a) = f(0) = 4$

$f(b) = f(1.5) = -1.25$

$f(c) = f(0.75) = +0.8125 \quad f(b) \times f(c) < 0$

Rădăcina ecuației se află în intervalul (b, c) adică $(0.75, 1.5)$

$a = 0.75; b = 1.5; c = 1.125$

$f(a) = f(0.75) = +0.8125$

$f(b) = f(1.5) = -1.25$

$f(c) = f(1.125) = -0.359375 \quad f(a) \times f(c) < 0$

Rădăcina ecuației se află în intervalul (a, c) adică $(0.75, 1.125)$

$a = 0.75; b = 1.125; c = 0.9375$

$f(a) = f(0.75) = +0.8125$

$f(b) = f(1.125) = -0.359375$

$f(c) = f(0.9375) = +0.19140625 \quad f(b) \times f(c) < 0$

Rădăcina ecuației se află în intervalul (b, c) adică $(0.9375, 1.125)$

$a = 0.9375; b = 1.125; c = 1.03125$

$f(a) = f(0.9375) = +0.19140625$

$$f(b) = f(1.125) = -0.359375$$

$$f(c) = f(1.03125) = -0.0927734375 \quad f(a) \cdot f(c) < 0$$

Rădăcina ecuației se află în intervalul (b,c) adică (0.9375,1.03125)

$$a = 0.9375; b = 1.03125; c = 0.984375$$

$$f(a) = f(0.9375) = +0.19140625$$

$$f(b) = f(1.03125) = -0.0927734375$$

$$f(c) = f(0.984375) = +0.0471191406 \quad f(b) \cdot f(c) < 0$$

Rădăcina ecuației se află în intervalul (b,c) adică (0.984375,1.03125)

$$a = 0.984375; b = 1.03125; c = 1.0078125$$

$$f(a) = f(0.984375) = +0.0471191406$$

$$f(b) = f(1.03125) = -0.0927734375$$

$$f(c) = f(1.0078125) = -0.0233764648 \quad f(a) \cdot f(c) < 0$$

Rădăcina ecuației se află în intervalul (a,c) adică (0.984375,1.0078125)

$$a = 0.984375; b = 1.0078125; c = 0.99609375$$

$$f(a) = f(0.984375) = +0.0471191406$$

$$f(b) = f(1.0078125) = -0.0233764648$$

$$f(c) = f(0.99609375) = +0.0117340088 \quad f(b) \cdot f(c) < 0$$

Rădăcina ecuației se află în intervalul (b,c) adică (0.99609375,1.0078125)

$$a = 0.99609375; b = 1.0078125; c = 1.001953125$$

$$f(a) = f(0.99609375) = +0.0117340088$$

$$f(b) = f(1.0078125) = -0.0233764648$$

$$f(c) = f(1.001953125) = -0.0058555603 \quad f(a) \cdot f(c) < 0$$

Rădăcina ecuației se află în intervalul (a,c) adică (0.99609375,1.001953125)

$$a = 0.99609375; b = 1.001953125 \quad c = 0.9990234375$$

$$f(a) = f(0.99609375) = +0.0117340088$$

$$f(b) = f(1.001953125) = -0.0058555603$$

$$f(c) = f(0.9990234375) = 0.0029306412 \quad f(b) \cdot f(c) < 0$$

Rădăcina ecuației se află în intervalul (b,c) adică (0.9990234375,1.001953125)

$$a = 0.9990234375; b = 1.001953125 \quad c = 1.0004882813$$

$$f(a) = f(0.9990234375) = 0.0029306412$$

$$f(b) = f(1.001953125) = -0.0058555603$$

$$f(c) = f(1.0004882813) = -0.001466055 \quad f(a) \cdot f(c) < 0$$

Eroarea $\mathcal{E} = 0.0014648438$

Rădăcina ecuației se află în intervalul (a,c) adică (0.9990234375,1.0004882813)

$$a = 0.9990234375; b = 1.0004882813 \quad c = 0.9997558253$$

$$f(a) = f(0.9990234375) = 0.0029306412$$

$$f(b) = f(1.0004882813) = -0.001466055$$

$$f(c) = f(0.9997558253) = 0.0007325839 \quad f(b) \cdot f(c) < 0$$

Eroarea $\mathcal{E} = 0.000732456$

Rădăcina ecuației se află în intervalul (b,c) adică (0.9997558253,1.0004882813)

$$a = 0.9997558253; b = 1.0004882813 \quad c = 1.0001220533$$

$$f(a) = f(0.9997558253) = 0.0007325839$$

$$f(b) = f(1.0004882813) = -0.001466055$$

$$f(c) = f(1.0001220533) = -0.000366145 \quad f(a) \cdot f(c) < 0$$

Eroarea $\varepsilon = 0.0003638003$

Radăcina ecuației este, $1.0001220533 = 1.000$

Rădăcina ecuației se află în intervalul (a,c) adică (0.9997558253,1.0001220533)

$$a = 0.9997558253; b = 1.0001220533 \quad c = 0.9999401532$$

$$f(a) = f(0.9997558253) = 0.0007325839$$

$$f(b) = f(1.0001220533) = -0.000366145$$

$$f(c) = f(0.9999401532) = 0.000179544 \quad f(b) \cdot f(c) < 0$$

Eroarea $\varepsilon = 0.0001819001$

Radăcina ecuației este, $1.0001220533 = 1.000$

<i>n</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>f(a)</i>	<i>f(c)</i>	<i>f(b)</i>	<i>Eroarea ε</i>
1	0	1,5	3	4	-1,25	-2	
2	0	0,75	1,5	4	+0.8125	-1,25	
3	0,75	1,125	1,5	+0.8125	-0.359375	-1,25	
4	0,75	0.9375	1,125	+0.8125	+0.1914062	-0.359375	
5	0.9375	1,03125	1,125	+0.1914062	-0.0927734	-0.359375	
6	0.9375	0,984375	1,03125	+0.1914062	+0.0471191	-0.0927734	
7	0,984375	1.0078125	1,03125	+0.0471191	-0.0233764	-0.0927734	
8	0,984375	0.9960937	1.0078125	+0.0471191	+0.0117340	-0.0233764	
9	0.9960937	1.0019531	1.0078125	+0.0117340	-0.0058555	-0.0233764	
10	0.9960937	0.9990234	1.0019531	+0.0117340	0.0029306	-0.0058555	
11	0.9990234	1.0004882	1.0019531	0.00293064	-0.0014660	-0.0058555	0.0014648438
12	0.9990234	0.9997558	1.0004882	0.00293064	0.0007325	-0.0014660	0.000732456
13	0.9997558	1.0001220	1.0004882	0.00073258	-0.0003661	-0.0014660	0.0003638003
14	0.9997558	0.9999401	1.0001220	0.00073258	0.0001795	-0.0003661	0.0001819001

Rădăcina ecuației este 1.0001220 cu eroare de $0,18 \cdot 10^{-3}$

2. Folosind metoda coardei să se determine rădăcina ecuației algebrice:

$x^2 - 5x + 4 = 0$, cu o eroare $\varepsilon < 10^{-3}$ (cu trei zecimale exacte), știind că această rădăcină se află în intervalul (0, 3).

În primă fază, se poate aproxima rădăcina ecuației $f(x)=0$ cu punctul de intersecție cu axa Ox a dreptei care trece prin punctele $A(a, f(a))$ și $B(b, f(b))$ de ecuație:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

Punctul de intersecție al dreptei cu axa Ox se obține introducând condiția $y=0$ în ecuația
Se obține:

$$x_1 = a - f(a) \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

Dacă $f(a) \cdot f(x_1) < 0$, rezultă că noul subinterval al rădăcinii ξ este (a, x_1)

În continuare algoritmul se repetă.

$a = 0$; $b = 3$

$f(a) = f(0) = 4$

$f(b) = f(3) = -2$ $f(0) \cdot f(3) = -8 < 0$

se determină punctul de intersecție cu axa Ox, rezultă,

1). $x_1 = 2$ și $f(x_1) = f(2) = -2$, $f(0) \cdot f(2) = -8 < 0$, rădăcina se află în intervalul $(0, 2)$

Se duce dreapta prin punctele $A(0, f(0))$ și $B_1(2, f(2))$, se determină punctul de intersecție cu axa Ox, se obține valoarea,

2). $x_2 = 4/3 = 1.33$, și $f(x_2) = f(4/3) = -0.9$, $f(0) \cdot f(4/3) = -3.6 < 0$, rădăcina se află în intervalul $(0, 1.33)$

Se duce dreapta prin punctele $A(0, f(0))$ și $B_2(1.33, f(1.33))$, se determină din nou punctul de intersecție cu axa Ox, se obține valoarea, x_3

3). $x_3 = 1.08$, $f(x_3) = f(1.08) = -0.22$, $f(0) \cdot f(1.08) = -0.88 < 0$, rădăcina se află în intervalul $(0, 1.08)$

Se duce dreapta prin punctele $A(0, f(0))$ și $B_3(1.08, f(1.08))$, se determină din nou punctul de intersecție cu axa Ox, se obține valoarea, x_4 ,

4). $x_4 = 1.02$, și $f(x_4) = f(1.02) = -0.06$, $f(0) \cdot f(1.02) = -0.24 < 0$, rădăcina se află în intervalul $(0, 1.02)$

Se duce dreapta prin punctele $A(0, f(0))$ și $B_4(1.02, f(1.02))$, se determină din nou punctul de intersecție cu axa Ox, se obține valoarea, x_5

5). $x_5 = 1.005$, și $f(x_5) = f(1.005) = -0.01$, $f(0) \cdot f(1.005) = -0.04 < 0$, rădăcina se află în intervalul $(0, 1.005)$

Se duce dreapta prin punctele $A(0, f(0))$ și $B_5(1.005, f(1.005))$, se determină din nou punctul de intersecție cu axa Ox, se obține valoarea, x_6

6). $x_6 = 0.995$, și $f(x_6) = f(0.995) = 0.015$, $f(0.995) \cdot f(1.005) = 0.06 > 0$, rădăcina se află în intervalul $(0.995, 1.005)$

Se duce dreapta prin punctele $A_1(0.995, f(0.995))$ și $B_5(1.005, f(1.005))$, se determină din nou punctul de intersecție cu axa Ox, se obține valoarea, x_7

7). $x_7 = 1.001$, și $f(x_7) = f(1.001) = -0.03$, $f(0.995) \cdot f(1.001) = -0.00045 < 0$, rădăcina se află în intervalul $(0.995, 1.001)$

Eroarea $\mathcal{E} = 1.001 - 0.995 = 0.006$

Radăcina ecuației este, $1.001 = 1$

n	a	x_n	b	$f(a)$	$f(x_n)$	$f(b)$	Eroare ε
1	0	2	3	4	-2	-2	
2	0	1,33	2	4	-0,9	-2	
3	0	1,08	1,33	4	-0,22	-0,9	
4	0	1,02	1,08	4	-0,06	-0,22	
5	0	1,005	1,02	4	-0,01	-0,06	
6	0	0,995	1,005	4	0,015	-0,01	
7	0,995	1,001	1,005	0,015	-0,03	-0,01	0,006
8	0,995	0,997	1,001	0,015	0,009	-0,03	0,004
9	0,997	0,998	1,001	0,009	0,006	-0,03	0,003
10	0,998	0,999	1,001	0,006	0,003	-0,03	0,002
11	0,999	0,9998	1,001	0,003	0,000	-0,03	0,001

Rădăcina este 1,000 cu eroarea de $1 \cdot 10^{-3}$

3. Folosind metoda tangentelor de ordinul I a lui Newton să se determine rădăcina ecuației algebrice: $x^2 - 5x + 4 = 0$, cu o eroare $\varepsilon < 10^{-3}$ (cu trei zecimale exacte), știind că această rădăcină se află în intervalul (0, 3).

Metoda tangentelor de ordinul I a lui Newton este o metodă ce permite calculul aproximativ al soluției unei ecuații algebrice $f(x)=0$ cu ajutorul tangentei la graficul funcției $f(x)$ în punctul x_n .

Se consideră funcția $f(x)$ care îndeplinește următoarele condiții: este continuă și derivabilă pe intervalul $[a, b]$, își schimbă semnul: $f(a) \cdot f(b) < 0$, este strict monotonă ($f'(x) > 0$ sau $f'(x) < 0$) și graficul ei nu admite nici un punct de inflexiune pe intervalul $[a, b]$: $f''(x) \neq 0$. În aceste condiții funcția admite o singură rădăcină în intervalul $[a, b]$ și se poate aplica metoda tangentelor de ordinul I a lui Newton.

Prin dezvoltarea în serie Taylor a funcției $f(x)$ în jurul punctului $x=a$ se obține:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \dots$$

Reținând doar primii doi termeni ai acestei dezvoltări, se obține ecuația unei drepte care reprezintă tangenta la graficul funcției în punctul A

$$y_1 = f(a) + (x-a) f'(a)$$

Dacă în ecuația de mai sus se pune condiția $y_1=0$, se obține punctul de intersecție al tangentei cu axa Ox:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

Prin dezvoltarea în serie Taylor a funcției $f(x)$ în jurul punctului $x=b$ și reținerea primilor doi termeni se obține tangenta la graficul lui $f(x)$ în punctul B, care intersectează axa Ox în punctul x_2 :

$$x_2 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

$$a = 0; b = 3$$

$$f(a) = f(0) = 4$$

$$f(b) = f(3) = -2 \quad f(0) \times f(3) = -8 < 0$$

$$f'(x) = 2x - 5$$

$$f'(a) = f'(0) = -5$$

$$f'(b) = f'(3) = 1$$

Se determină punctul de intersecție al tangentei cu axa Ox

$$x_1 = 4/5 = 0.8$$

$$f(0.8) = (0.8)^2 - 5 \times 0.8 + 4 = 0.64$$

$$f'(0.8) = 2 \times 0.8 - 5 = -3.4$$

Se duce tangenta în punctul de coordonate $(x_1, f(x_1))$, care va intersecta axa Ox în punctul x_2 ,

$$x_2 = 0.8 - 0.64 / -3.4 = 0.98823$$

$$f(0.98823) = 0.03545$$

$$f'(0.98823) = 2 \times 0.98823 - 5 = -3.02354$$

Se duce tangenta în punctul de coordonate $(x_2, f(x_2))$, care va intersecta axa Ox în punctul x_3 ,

$$x_3 = 0.98823 - 0.03545 / -3.02354 = 0.99995$$

$$f(0.99995) = 0.00015$$

$$f'(0.99995) = 2 \times 0.99995 - 5 = -3.0001$$

$$\text{Eroarea } \mathcal{E} = 0.01172$$

Se duce tangenta în punctul de coordonate $(x_3, f(x_3))$, care va intersecta axa Ox în punctul x_4 ,

$$x_4 = 0.99995 - 0.00015 / -3.0001 = 0.9999999983$$

$$f(0.9999999983) = 0.0000000003$$

$$\text{Eroarea } \mathcal{E} = 0.0000499998$$

$$\text{Radăcina ecuației este, } 0.9999999983 = 1.000$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}	$f(x_{n+1})$	Eroare ε
1	0	4	-5	0,8	0,64	0,8
2	0,8	0,64	-3,4	0,98823	0,03545	0,18823
3	0,98823	0,03545	-3,02354	0,99995	0,00015	0,01172
4	0,99995	0,00015	-3,0001	0,9999999983	0,0000000003	0,000049
5	0,9999999983	0,0000000003	-3,0000000003	0,9999999999	0,00000000001	0,0000000016

Radăcina ecuației este 0,999999999 cu eroarea de $1,6 \cdot 10^{-9}$

4. Folosind metoda tangentelor de ordinul II a lui Newton să se determine rădăcina ecuației algebrice: $x^2 - 5x + 4 = 0$, cu o eroare $\varepsilon < 10^{-3}$ (cu trei zecimale exacte), știind că această rădăcină se află în intervalul $(0, 3)$.

Se consideră funcția $f(x)$ care îndeplinește următoarele condiții: este continuă și derivabilă pe intervalul $[a, b]$, își schimbă semnul: $f(a) \cdot f(b) < 0$, este strict monotonă ($f'(x) > 0$ sau $f'(x) < 0$) și graficul ei nu admite nici un punct de inflexiune pe intervalul $[a, b]$: $f''(x) \neq 0$. În aceste condiții funcția admite o singură rădăcină în intervalul $[a, b]$ și se poate aplica metoda tangentelor de ordinul II a lui Newton.

Prin dezvoltarea în serie Taylor a funcției $f(x)$ în jurul punctului $x=a$ se rețin doar primii trei termeni ai acestei dezvoltări, se obține ecuația unei parabole

$$y = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a)$$

Punând condiția $y = 0$ în ecuație se obține soluția:

$$x = a - \frac{1}{\frac{f'(a)}{f(a)} - \frac{f''(a)}{2 \cdot f'(a)}}$$

Dacă această soluție este în afara intervalului (a,b) atunci se schimbă punctul de start al metodei în $x=b$, ca la metoda tangentelor de ordinul I:

$$x = b - \frac{1}{\frac{f'(b)}{f(b)} - \frac{f''(b)}{2 \cdot f'(b)}}$$

$$a = 0; b = 3$$

$$f(a) = f(0) = 4$$

$$f(b) = f(3) = -2 \quad f(0) \cdot f(3) = -8 < 0$$

$$f^1(x) = 2x - 5$$

$$f''(x) = 2$$

$$f^1(a) = f^1(0) = -5$$

$$f^1(b) = f^1(3) = 1$$

$$f''(a) = f''(0) = 2$$

$$f''(b) = f''(3) = 2$$

$$x_1 = 20/21 = 0.95238$$

$$f(x_1) = 0.1451276$$

$$f^1(x_1) = 2 \cdot 0.95238 - 5 = -3.09524$$

Se duce tangenta în punctul de coordonate $(x_1, f(x_1))$, care va intersecta axa Ox în punctul x_2 ,

$$x_2 = 0.998568$$

$$f(0.998568) = 0.004298$$

$$f^1(0.998568) = 2 \cdot 0.998568 - 5 = -3.002864$$

$$f''(0.998568) = 2$$

Se duce tangenta în punctul de coordonate $(x_2, f(x_2))$, care va intersecta axa Ox în punctul x_3

$$x_3 = 0.99999862$$

Se duce tangenta în punctul de coordonate $(x_3, f(x_3))$, care va intersecta axa Ox în punctul x_4

$$f'(0.99999862) = 2 \times 0.99999862 - 5 = -3.00000276$$

$$f''(0.99999862) = 2$$

$$x_4 = 1.000000$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f''(x_n)$	x_{n+1}	$f(x_{n+1})$	Eroare ε
1	0	4	-5	2	0.95238	0.1451276	0.95238
2	0.95238	0.1451276	-3.09524	2	0.998568	0.004298	0,046188
3	0.998568	0.004298	-3.002864	2	0.999998	0,000006	0,001430
4	0.999998	0,000006	-3.000002	2	1,000000		0,0000002

Radăcina ecuației este, 1,000000 cu eroarea $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-6}$

5. Folosind metoda iterativă pentru ecuații de forma $x=g(x)$ să se găsească rădăcina ecuației: $x^2 - 5x + 4 = 0$, cu o eroare $\varepsilon < 10^{-3}$ (cu trei zecimale exacte), știind că această rădăcină se află în intervalul $(0, 3)$.

Fie o funcție $f(x)$ continuă și derivabilă pe intervalul $[a, b]$, strict monotonă, care îndeplinește condiția $f(a) \times f(b) < 0$. Dacă ecuația $f(x)=0$ are o singură rădăcină $\xi \in (a,b)$ și se poate scrie sub forma echivalentă:

$$x=g(x)$$

unde $g(x)$ este o funcție continuă în intervalul (a,b) .

Dacă șirul format cu ajutorul relației de mai sus, sub forma relației de recurență,

$$x_{n+1}=g(x_n)$$

este convergent, atunci limita acestui șir este tocmai rădăcina ecuației $f(x)=0$

a)

$$x(x-5) = -4$$

$$x = -4/(x-5) \text{ sau } x = 4/(5-x)$$

Se pleacă de la $x=0$ și se obține

$$x_1 = 4/(5-0) = 0.8$$

$$x_2 = 4/(5-0.8) = 0.952381$$

$$x_3 = 4/(5-0.952381) = 0.988235$$

$$x_4 = 4/(5-0.988235) = 0.997062$$

$$x_5 = 4/(5-0.997062) = 0.9992674$$

$$x_6 = 4/(5-0.9992674) = 0.9998169$$

$$\text{Eroarea } \mathcal{E} = 0.9998169 - 0.9992674 = 0.0005595$$

$$x_7 = 4/(5-0.9998169) = 0.9999542$$

$$\text{Eroarea } \mathcal{E} = 0.9999542 - 0.9998169 = 0.00013$$

$$\text{Rădăcina ecuației este, } 0.9999542 = 1.000$$

b) ecuația se poate scrie sub forma echivalentă $x=g(x)$

$$x^2 = 5x - 4$$

$$x = \sqrt{5x-4}$$

$x = 0$ nu se poate aplica deoarece valoarea $g(0)$ nu se află pe axa nr. Reale(R).

$$x = 1$$

$$x_1 = \sqrt{5-4} = 1$$

$$f(x_1) = f(1) = 0$$

$$\text{Rădăcina ecuației este, } x = 1$$