

Pasul 1: Se elimină necunoscuta x_1 din ecuațiile 2, 3, ..., n ale sistemului

(2.1) adică se anulează primele elemente ale liniilor 2, 3, ..., n din matricea $[A]$.

Presupunând că $a_{11} \neq 0$, linia 1 se numește *linie de pivotare*. Se caută ca valoarea absolută a primului element al liniei de pivotare să fie cât mai mare. În cazul în care $a_{11} = 0$ sau are o valoare absolută foarte mică, se schimbă poziția liniei 1 cu cea corespunzătoare liniei i având valoarea absolută a primului element a_{1i} cea mai mare. Se împart elementele liniei 1 a matricelor $[A]$ și $\{B\}$ la a_{11} obținându-se:

$$a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \quad j=2, \dots, n; \quad b_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}} \quad (2.4)$$

Se scad liniile i situate sub linia de pivotare din linia 1 multiplică cu primele elementele ale acestor linii: a_{i1} , $i = 2, 3, \dots, n$ obținându-se:

$$a_{i1}^{(1)} = 0; \quad a_{ij}^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}}{a_{11}}, \quad b_i^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{i1} & b_i \end{vmatrix}}{a_{11}}, \quad i, j \geq 2 \quad (2.4')$$

După primul pas se obține sistemul echivalent de ecuații:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)} \\ \dots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases} \quad (2.5)$$

Pasul 2: Linia 1 nu se modifică. Se procedează analog ca la **pasul 1** cu ecuațiile 2, 3, ..., n anulând primele două elemente ale liniilor 3, 4, ..., n din matricea $[A]$. Presupunând că $a_{22}^{(1)} \neq 0$, linia a doua este linie de pivotare. Se împarte linia 2 la coeficientul lui (1) a_{22} și se scad liniile i situate sub noua linie de pivotare din linia 2 multiplică cu primele elementele ale acestor linii obținându-se:

$$a_{2j}^{(2)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad j=2, \dots, n; \quad b_1^{(2)} = \frac{b_1^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (2.6)$$

$$a_{i2}^{(2)} = 0; \quad a_{ij}^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{2j}^{(1)} \\ a_{i2}^{(1)} & a_{ij}^{(1)} \end{vmatrix}}{a_{22}^{(1)}}, \quad b_i^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{22}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ a_{i2}^{(1)} & b_i^{(1)} \end{vmatrix}}{a_{22}^{(1)}}, \quad i, j \geq 3 \quad (2.6')$$

După cel de al doilea pas se obține sistemul echivalent de ecuații:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \dots \\ a_{n3}^{(2)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases} \quad (2.7)$$

Procedeul se repetă pentru celelalte linii de pivotare 3, 4, 5, ..., n , astfel încât după **n pași** se ajunge la sistemul echivalent de ecuații:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \quad x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \quad \quad \quad \dots \\ \quad \quad \quad \quad x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n = b_{n-1}^{(n-1)} \\ \quad \quad \quad \quad \quad x_n = b_n^{(n)} \end{cases} \quad (2.8)$$

Necunoscutele $x_1, x_2, \dots, x_n$ se determină prin *substituție*, pornind de la ultima ecuație și apoi succesiv până la prima ecuație obținându-se:

$$\begin{cases} x_n = b_n^{(n)}; \\ x_{n-1} = b_{n-1}^{(n-1)} - a_{n-1,n}^{(n-1)} \cdot x_n; \\ \dots \\ x_1 = b_1^{(1)} - \sum_{k=2}^n a_{1k}^{(1)} \cdot x_k \end{cases} \quad (2.9)$$

Aplicația 1.1

Folosind metoda Gauss să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -2 \end{cases} \quad (2.10)$$

Matricea sistemului $[A]$ și maricea coloană a termenilor liberi $[B]$ se scriu:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}; \quad \{B\} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Pasul 1: Coeficienții se determină cu ajutorul relațiilor (2.4) și (2.4').

După pasul 1 se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ \quad 2x_2 + x_3 = 2 \\ \quad \quad x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -2 \\ \quad -3x_2 \quad -2x_4 = -5 \end{cases} \quad (2.12)$$

Pasul 2: Ecuația 1 nu se modifică. Coeficienții se determină cu ajutorul relațiilor (2.6) și (2.6'). După pasul 2 se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ \quad x_2 + 0,5x_3 = 1 \\ \quad \quad 1,5x_3 - 3x_4 = -3 \\ \quad \quad 1,5x_3 - 2x_4 = -2 \end{cases} \quad (2.13)$$

Pasul 3: Ecuațiile 1 și 2 nu se modifică.

După pasul 3 se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ \quad x_2 + 0,5x_3 = 1 \\ \quad \quad x_3 - 2x_4 = -2 \\ \quad \quad \quad x_4 = 1 \end{cases} \quad (2.14)$$

- se împarte ecuația 2 la coeficientul a_{22} și se elimină necunoscuta x_2 din ecuațiile 1, 3, 4, ... n , calculându-se noii coeficienți cu ajutorul relațiilor:

$$i=2: \quad a_{2j}^{(2)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad j = 2, \dots, n; \quad b_1^{(2)} = \frac{b_1^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (2.46)$$

$$i=1: \quad a_{1j}^{(2)} = 1; \quad a_{12}^{(2)} = 0; \quad a_{1j}^{(2)} = -\frac{\begin{vmatrix} a_{12}^{(1)} & a_{1j}^{(1)} \\ a_{22}^{(1)} & a_{2j}^{(1)} \end{vmatrix}}{a_{22}^{(1)}}, \quad b_1^{(2)} = -\frac{\begin{vmatrix} a_{12}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(1)} & b_2^{(1)} \end{vmatrix}}{a_{22}^{(1)}}, \quad j \geq 3 \quad (2.47)$$

$$i=3, 4, \dots, n: \quad a_{ii}^{(2)} = a_{i2}^{(2)} = 0, \quad a_{ij}^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{2j}^{(1)} \\ a_{i2}^{(1)} & a_{ij}^{(1)} \end{vmatrix}}{a_{22}^{(1)}}, \quad b_i^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{22}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ a_{i2}^{(1)} & b_i^{(1)} \end{vmatrix}}{a_{22}^{(1)}}, \quad j \geq 3 \quad (2.48)$$

După pasul al doilea se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x_1 + a_{13}^{(2)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(2)}x_n = b_1^{(2)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \dots \\ a_{n3}^{(2)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases} \quad (2.49)$$

La pașii 3, 4, 5, ..., n se procedează în mod analog.

În final rezultă sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x_1 = b_1^{(n)} \\ x_2 = b_2^{(n)} \\ x_3 = b_3^{(n)} \\ \dots \\ x_n = b_n^{(n)} \end{cases} \quad (2.50)$$

Se observă că prin metoda *Gauss Jordan* elementele obținute pentru matricea $\{B\}$ sunt tocmai soluțiile sistemului de ecuații.

Aplicația 1.2

Folosind metoda *Gauss-Jordan* să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 12 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 15 \end{cases} \quad (2.51)$$

Matricea sistemului $[A]$ și matricea coloană a termenilor liberi $\{B\}$ sunt:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \{B\} = \begin{bmatrix} 12 \\ -3 \\ 8 \\ 15 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Pasul 1: Coeficienții se determină cu ajutorul relațiilor (2.1.43), (2.1.44):

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(1)} &= \frac{a_{11}}{a_{11}} = 1; \quad a_{12}^{(1)} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = 2; \quad a_{13}^{(1)} = \frac{a_{13}}{a_{11}} = 1; \quad a_{14}^{(1)} = \frac{a_{14}}{a_{11}} = 1; \quad b_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}} = 12; \quad (2.53) \\
a_{21}^{(1)} &= 0; \quad a_{22}^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -3; \quad a_{23}^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -1; \quad a_{24}^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{1} = -3; \quad b_2^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{1} = -21; \\
a_{31}^{(1)} &= 0; \quad a_{32}^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{1} = -7; \quad a_{33}^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -2; \quad a_{34}^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -2; \quad b_3^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}}{1} = -28; \\
a_{41}^{(1)} &= 0; \quad a_{42}^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -7; \quad a_{43}^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{1} = -5; \quad a_{44}^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{1} = -1; \quad b_4^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 4 & 15 \end{vmatrix}}{1} = -33
\end{aligned}$$

După primul pas, matricea sistemului $[A]$ și matricea coloană $\{B\}$ devin:

$$[A]^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & -7 & -2 & -2 \\ 0 & -7 & -5 & -1 \end{bmatrix}; \quad \{B\}^{(1)} = \begin{bmatrix} 12 \\ -21 \\ -28 \\ -33 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Pasul 2: Coeficienții se determină cu ajutorul relațiilor (2.1.46):

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(2)} &= 1; \quad a_{12}^{(2)} = 0; \quad a_{13}^{(2)} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{1}{3}; \quad a_{14}^{(2)} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}}{-3} = -1; \quad b_1^{(2)} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ -3 & -21 \end{vmatrix}}{-3} = -2; \\
a_{21}^{(2)} &= 0; \quad a_{22}^{(2)} = \frac{a_{22}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = 1; \quad a_{23}^{(2)} = \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{1}{3}; \quad a_{24}^{(2)} = \frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = 1; \quad b_2^{(2)} = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = 7; \quad (2.55)
\end{aligned}$$

După al doilea pas, matricea sistemului $[A]$ și matricea coloană $\{B\}$ devin:

$$[A]^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & 6 \end{bmatrix}; \quad \{B\}^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 21 \\ 16 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Pasul 3: Coeficienții se determină cu ajutorul relațiilor:

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(3)} &= 1; \quad a_{12}^{(3)} = a_{13}^{(3)} = 0; \quad a_{14}^{(3)} = -\frac{\begin{vmatrix} 1/3 & -1 \\ 1/3 & 5 \end{vmatrix}}{1/3} = -6; \quad b_1^{(3)} = -\frac{\begin{vmatrix} 1/3 & -2 \\ 1/3 & 21 \end{vmatrix}}{1/3} = -23 \quad (2.57) \\
a_{21}^{(3)} &= 0; \quad a_{22}^{(3)} = 1; \quad a_{23}^{(3)} = 0; \quad a_{24}^{(3)} = -\frac{\begin{vmatrix} 1/3 & 1 \\ 1/3 & 5 \end{vmatrix}}{1/3} = -4; \quad b_2^{(3)} = -\frac{\begin{vmatrix} 1/3 & 7 \\ -8/3 & 21 \end{vmatrix}}{1/3} = -14 \\
a_{31}^{(3)} &= a_{32}^{(3)} = 0; \quad a_{33}^{(3)} = \frac{a_{33}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = 1; \quad a_{34}^{(3)} = \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = 15; \quad b_3^{(3)} = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = 63; \\
a_{41}^{(3)} &= a_{42}^{(3)} = a_{43}^{(3)} = 0; \quad a_{44}^{(3)} = \frac{\begin{vmatrix} 1/3 & 5 \\ -8/3 & 6 \end{vmatrix}}{1/3} = 46; \quad b_4^{(3)} = \frac{\begin{vmatrix} 1/3 & 21 \\ -8/3 & 16 \end{vmatrix}}{1/3} = 184
\end{aligned}$$

După al treilea pas, matricea sistemului $[A]$ și matricea coloană $\{B\}$ devin:

(2.58)

Pasul 4: Coeficienții se determină cu ajutorul relațiilor :

(2.59)

După acest pas, matricea sistemului $[A]$ și matricea coloană $\{B\}$ devin:

(2.60)

S-au obținut pentru elementele matricei coloană $\{B\}$ chiar soluțiile sistemului (2.51):

$$x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4. \quad (2.61)$$

1.3. Metoda lui Gauss

În primul rând, trebuie făcută precizarea că metodele numerice pentru rezolvarea sistemelor de ecuații, care urmează a fi prezentate în continuare, sunt destinate abordării sistemelor de n ecuații cu n necunoscute, cu coeficienți reali, despre care se cunoaște, apriori, faptul că sunt compatibile.

Un sistem de forma

(1)

în care $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ pentru $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$, poartă numele de **sistem de ecuații liniare**.

Detaliind, în continuare, trebuie arătat că metodele numerice utilizate pentru rezolvarea sistemelor de ecuații liniare se împart în două categorii: **metode directe**, care determină soluția exactă a sistemului și **metode iterative**, care - pornind de la o soluție inițială arbitrară - determină un șir de aproximații succesive ale vectorului - soluție a sistemului.

Cea mai veche, cea mai bine cunoscută și, totodată, cea mai utilizată metodă de rezolvare numerică a sistemelor de ecuații algebrice liniare este **metoda Gauss**, care face parte din categoria metodelor directe; principiul metodei este prezentat în continuare.

Pornindu-se de la un sistem de forma (1), se construiește o matrice de forma

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right), \quad (2)$$

rezultată prin alipirea la matricea coeficienților sistemului, A , a vectorului coloană a termenului liber, B . În continuare, algoritmul metodei urmărește transformarea matricei $\overline{A}$ într-o matrice ale cărei elemente situate sub diagonala $a_{11} - a_{22} - \dots - a_{nn}$ să fie nule; trebuie parcurși următorii pași:

- ✓ se calculează o serie de multiplicatori de forma $l_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$, după care din

fiecare linie „i” se scade linia întâi înmulțită cu l_{i1} , $i = 2, 3, \dots, n$; în cazul în care $a_{11} = 0$, se schimbă prima linie cu o alta, care să aibă primul element nenul, după care se procedează la cele de mai sus. Rezultă, astfel, după renotare, o matrice de forma

$$\overline{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array} \right); \quad (3)$$

- ✓ se calculează o nouă serie de multiplicatori, de forma $l_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$, după

care din fiecare linie „i” se scade linia a doua înmulțită cu l_{i2} , $i = 3, 4, \dots, n$; în cazul în care $a_{22}^{(1)} = 0$, se schimbă a doua linie cu o alta, care să aibă al doilea element nenul, după care se procedează la cele de mai sus. Rezultă, astfel, după o nouă renotare, o altă matrice de forma

$$\overline{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array} \right); \quad (4)$$

- ✓ se continuă aplicarea procedurii până când, după $n-1$ pași, se obține matricea

$$\overline{A}^{(n-1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & \dots & a_{1n}^{(n-1)} & b_1^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & \dots & a_{2n}^{(n-1)} & b_2^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

în care toate elementele de sub diagonală $a_{11}^{(n-1)}, a_{22}^{(n-1)}, \dots, a_{nn}^{(n-1)}$ sunt nule. Dacă se renunță, în notațiile din această ultimă matrice, la exponenții care indică numărul pasului și se reface, pe baza ei, sistemul de ecuații, rezultă:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n-1} \cdot x_{n-1} + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n-1} \cdot x_{n-1} + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n-1n-1} \cdot x_{n-1} + a_{n-1n} \cdot x_n = b_{n-1} \\ a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{cases} \quad (6)$$

- ✓ din ultima ecuație a sistemului (6) se determină x_n , după care, înlocuind în penultima ecuație pe x_n , se determină x_{n-1} și așa mai departe, până când, în final, se înlocuiesc în prima ecuație valorile, deja aflate, pentru $x_2, x_3, \dots, x_n$ și se calculează x_1 .

Conform [11], numărul N de operații aritmetice simple necesar a fi efectuate pentru rezolvarea, prin metoda Gauss, a unui sistem de ecuații liniare de rang n este

$$N = \frac{4n^3 - n}{3} \quad (7)$$

Metoda Gauss, fiind o metodă directă, conduce la găsirea soluției exacte a sistemului, în măsura în care acesta este compatibil.

Exemplu de aplicare

Să se rezolve sistemul
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 28 \\ 2x_1 + 4x_2 + 17x_3 = 31 \end{cases}$$

Se construiește matricea extinsă a sistemului, $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 4 & 3 & 10 & 28 \\ 2 & 4 & 17 & 31 \end{array} \right)$.

Se calculează multiplicatorii $l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{4}{2} = 2$, $l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{2}{2} = 1$ și se efectuează operațiile $L_2 - l_{21} \cdot L_1$ și $L_3 - l_{31} \cdot L_1$ (unde L_i înseamnă linia „i”).

Rezultă $\bar{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 14 & 20 \end{array} \right)$; se calculează, apoi, multiplicatorul

$$l_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{3}{1} = 3 \text{ și se efectuează } L_3 - l_{32} \cdot L_2, \text{ după care se obține}$$

$$\bar{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right). \text{ Sistemul inițial poate fi rescris, acum, sub forma}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \\ x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Urmează imediat, din ultima ecuație, $x_3 = 1$, apoi, din a doua, $x_2 = 2$ și, în fine, din prima ecuație, $x_1 = 3$.