

CAPITOLUL 10

MIȘCAREA NEPERMANENTĂ A LICHIDELOR ÎN SISTEME HIDRAULICE SUB PRESIUNE

Mișcarea nepermanentă a lichidelor în conducte sub presiune este un caz normal de funcționare a acestora. Această mișcare este întreținută în sistemele hidraulice de variația cererii consumului în timp, de pornirea și oprirea instalațiilor sau de avarii. Schimbarea parametrilor hidraulici în timp este principala caracteristică a acestor mișcări și ca efect se poate nota suprasolicitarea sistemului hidraulic.

În amenajările cu caracter hidrotehnic aceste mișcări se întâlnesc curent la rețelele de conducte sub presiune, la stațiile de pompare, la aducțiuni și distribuții gravitaționale sub presiune, la subtraversări sifonate, alimentări cu apă potabilă, industrială etc.

În acest capitol se fac referiri la descrierea fizică a fenomenului, calculul vitezei de propagare a undelor, ecuațiile mișcării și modul de soluționare a acestora, particularitățile fenomenului în instalațiile hidraulice specifice meseriei, metode și mijloace de protecție ale instalațiilor împotriva efectelor loviturii de berbec și unele fenomene asociate cu lovitura de berbec. Se analizează și câteva cazuri practice care ajută la înțelegerea aspectelor teoretice și introduce pe viitorul specialist în problematica concretă, frecvent întâlnită în practica de zi cu zi.

10.1. Noțiuni generale

Datorită variației în timp a condițiilor limită, mișcarea lichidelor în conducte sub presiune aproape în toate cazurile este nepermanentă - numai pe anumite intervale mici de timp și cu aproximație se poate considera mișcare permanentă.

Proiectarea instalațiilor hidraulice trebuie să cuprindă cel puțin și calcule de verificare în mișcarea nepermanentă, iar regulamentele de exploatare trebuiesc riguros respectate pentru a nu suprasolicita sistemele hidraulice prin aceste mișcări nepermanente. Calculele se întocmesc pentru cele mai nefavorabile condiții de funcționare.

În funcție de viteza variației în timp a parametrilor hidraulici se întâlnesc:
- **mișcări nepermanente lent variate** - când mărimile caracteristice ale mișcării (viteze, presiuni) variază așa de lent încât se poate accepta în descrierea fenomenului modelul de fluid **incompresibil**, și

- **mişcări nepermanente rapid variate** - când variația în timp a mărimilor este relativ bruscă și calculele trebuie să țină seama de *compresibilitatea* lichidului și de *elasticitatea* conductelor.

Mișcările nepermanente lent variate se mai numesc **oscilații de masă** și se întâlnesc în sisteme sub presiune prevăzute cu rezervoare cu nivel liber (castele de echilibru) sau cu pernă de aer și în cazurile în care condițiile inițiale ale mișcării corespund echilibrului hidrostatic sau sunt apropiate de acestea.

Mișcările nepermanente rapid variate - **lovitura de berbec** - au loc în sisteme sub presiune când condițiile la limită se modifică brusc. Acest fenomen se propagă sub formă de unde, cu viteze foarte mari și este însoțit de variații mari ale presiunii, produce șocuri în instalații hidraulice, care poate conduce la avarii. Fenomenul se recunoaște prin zgomotele și vibrațiile puternice pe care le produce. Datorită vitezei mari de propagare și a duratei mici a oscilațiilor de presiune, pentru primele oscilații (cu o oarecare aproximare) se acceptă neglijarea frecărilor, însă de acestea trebuie ținut seama încât generează acele forțe care amortizează în timp fenomenul.

Una din metodele și mijloacele cele mai eficiente de atenuare a efectelor loviturii de berbec este transformarea mișcării **rapid variate** în mișcare **lent variată** prin rezervoare (deschise sau cu pernă de aer).

10.2. Mișcare nepermanenta rapid variată (Lovitura de berbec)

10.2.1. Descrierea fizică a fenomenului loviturii de berbec

Așa cum s-a arătat, lovitura de berbec este fenomenul de mișcare nepermanentă rapid variată a lichidelor în conducte sub presiune, ca urmare a modificării rapide a condițiilor la limită.

10.2.1.1. Aspectul calitativ al fenomenului

Pentru înțelegerea fenomenului se prezintă această descriere calitativă a fenomenului.

Se consideră un rezervor cu lichid, având suprafața nivelului liber la cota h_0 constantă față de axa conductei, care alimentează o conductă lungă orizontală, de secțiune A , prin care curge lichid la parametrii hidraulici inițiali constanți Q_0, V_0, p_0 (fig. 10.1). Se presupune ca robinetul O din capătul aval al conductei se închide instantaneu. Dacă lichidul ar fi incompresibil și pereții conductei perfect rigizi tot lichidul s-ar opri instantaneu la închiderea robinetului.

În ipoteza neglijării frecărilor, considerării compresibilității lichidului (model de fluid pascalian) și a elasticității conductei, fenomenul se explică astfel: în momentul închiderii instantanee a robinetului din secțiunea O , particulele de lichid în contact cu robinetul se opresc, dar restul lichidului din conductă se mișcă cu viteza inițială V_0 (datorită inerției) și comprimă stratul de lichid oprit la robinet. Comprimarea are loc conform compresibilității izoterme, care are loc sub acțiunea creșterii presiunii la valoarea $p_0 + \Delta p$ (în masa de lichid oprită lângă robinet). Odată cu creșterea presiunii se deformează și conducta de la secțiunea A la $A + \Delta A$. După oprirea și comprimarea particulelor de lichid din imediata vecinătate a robinetului se opresc și se comprimă succesiv alte straturi de lichid - dinspre robinet spre rezervor - crescând presiunea cu Δp în straturile oprite și deformându-se și conducta. Fenomenul de oprire și comprimare a lichidului din aproape în aproape (cu creșterea presiunii cu Δp și deformării secțiunii cu ΔA) se transmite din aval (pct. O) spre amonte (pct. R) sub forma unei unde.

Când tot lichidul de pe conductă s-a comprimat, respectiv a crescut presiunea cu Δp și s-a dilatat conducta cu ΔA , viteza s-a anulat în toată masa lichidului de pe conductă (energia cinetică s-a transformat în energia potențială elastică a lichidului și conductei). Acesta poziție de repaus este instantanee, fiindcă în secțiunea de îmbinare a rezervorului cu conducta, în secțiuni infinite vecine (R în conductă, r în rezervor) există diferența de presiune Δp (în R este $p_0 + \Delta p$ în r este $p_0 = \gamma h_0$) care, împreună cu tensiunea din peretele conductei, pune în mișcare inversă lichidul din conductă cu viteza V_0 . Astfel lichidul pus în mișcare ajunge la presiunea inițială, iar conducta la secțiunea A , progresiv, (strat cu strat) din secțiunea R spre O . În momentul când fenomenul a ajuns în O tot fluidul are presiunea p_0 , viteza $-V_0$, iar secțiunea a revenit la A . Timpul de la momentul închiderii robinetului, a propagării comprimării și decompresiei lichidului din O în R și invers este timpul necesar fenomenului - undei de presiune - pentru parcurgerea distanței $2L$ cu viteza sa de propagare c (celeritate):

$$\tau = \frac{2L}{c}. \text{ În acest moment lichidul din conductă are viteza } -V_0 \text{ și datorită inerției}$$

continuă mișcarea dinspre O spre R . Robinetul în O fiind închis, lichidul de lângă robinet rămâne pe loc și este "întins", dilatat, în masa lichidă oprită producându-se scăderea presiunii cu Δp , conform legii compresibilității, la valoarea $p_0 - \Delta p$. Dilatarea lichidului, însoțită de scăderea presiunii și micșorarea secțiunii (cu ΔA conform legii elasticității), odată cu anularea vitezei se propagă din strat în strat spre rezervor. Când fenomenul ajunge în secțiunea rezervorului - sub formă de undă - tot lichidul din conductă este în repaus, are presiunea

$p_0 - \Delta p$ și secțiunea este $A - \Delta A$. Existența instantanee a diferenței de presiune $p_0 - (p_0 - \Delta p) = + \Delta p$ între secțiunile r și R , respectiv efortul din peretele conductei, produce mișcarea lichidului dinspre R spre O cu viteza inițială V_0 .

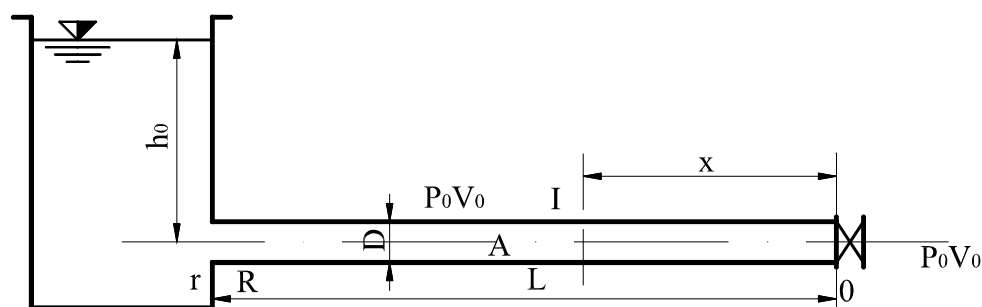


Fig. 10.1. Schema conductei

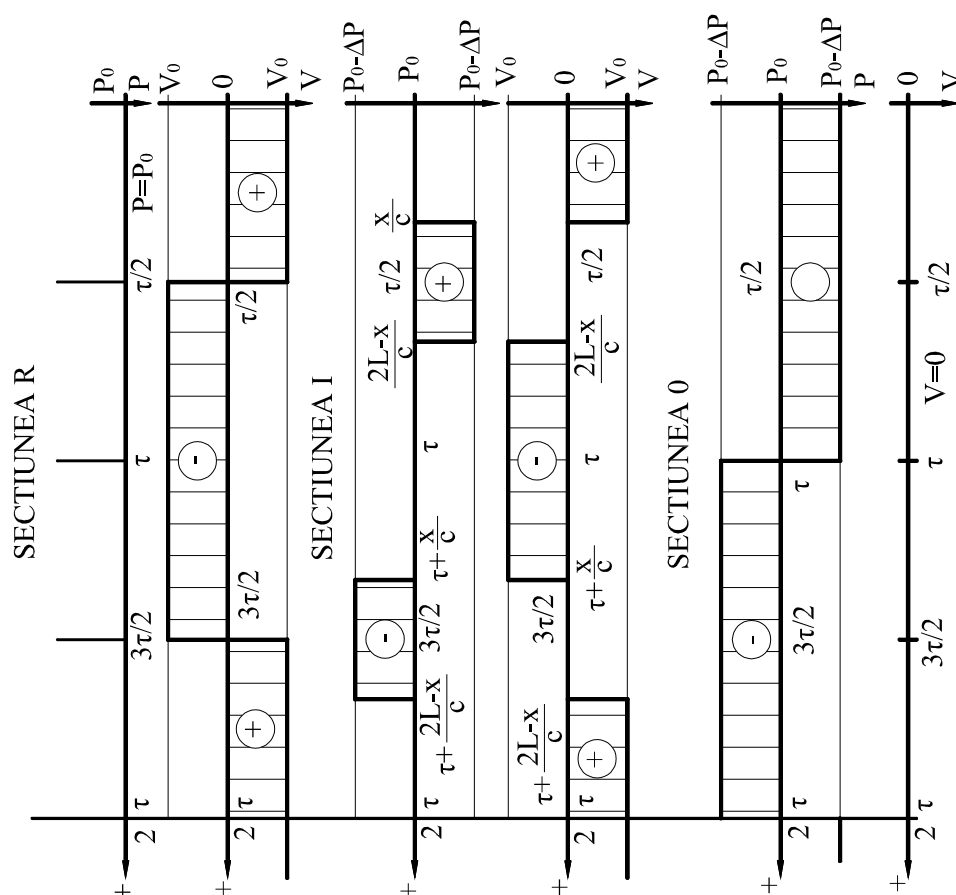


Fig. 10.2 Variația presiunii și vitezei în secțiunile conductei pentru model de lichid Pascalian

Destinderea lichidului - corespunzătoare presiunii p_0 - și a secțiunii conductei, însoțită de punerea în mișcare a lichidului cu V_0 se propagă, strat cu strat cu viteza c , până în secțiunea O . Instantaneu, după timpul 2τ , parametri mișcării lichidului revin la cei inițiali p_0 , V_0 . După un astfel de ciclu complet fenomenul descris se repetă sub forma unei mișcări oscilatorii. Amplitudinea variației parametrilor p și V se reduce în timp datorită frecărilor vâscoase și turbulente.

În concluzie, la analiza și calculul loviturii de berbec trebuie ținut seama de compresibilitatea lichidului, elasticitatea conductei și de frecare - model de lichid real. Epura presiunii și vitezei pe conducta în secțiunea O , R și I corespunde fig. 10.2.

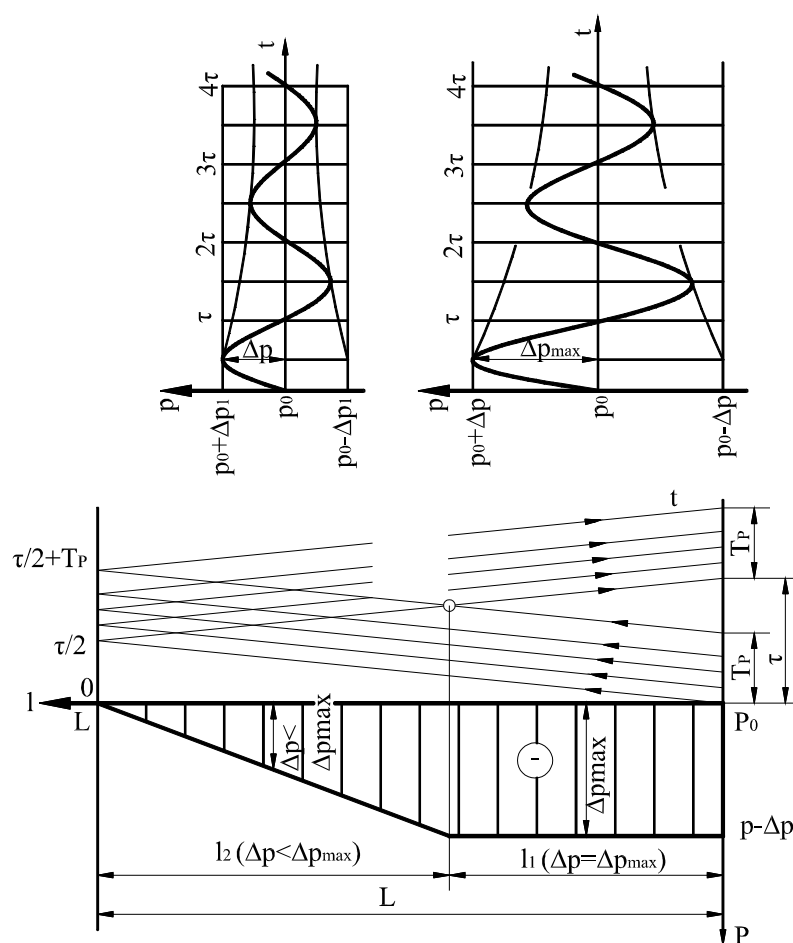
Prima undă care se propagă în lungul conductei, ca urmare a perturbației produse de organul obturator, se numește **undă directă**, iar reflectata ei - care vine de la rezervoare la robinet - **undă inversă**. **Faza directă** a loviturii de berbec într-o secțiune I de pe conductă, aflată la distanța x de organul perturbator este perioada de timp cuprinsă între momentul trecerii primei unde directe și momentul sosirii primei unde inverse. **Faza inversă** a loviturii corespunde perioadei dintre momentul trecerii unei unde inverse și momentul sosirii următoarei unde directe.

Datorită faptului că închiderea robinetului din secțiunea O necesită un anumit timp, T (timp de perturbare), valoarea maximă a suprapresiunii în O nu se obține instantaneu, presiunea crește până la valoarea maximă progresiv după legea închiderii robinetului. În perioada închiderii de la organul perturbator pleacă continuu unde directe care pe parcursul conductei întâlnesc unde inverse cu care se compun.

În raport cu mărimea timpului de închidere T și a timpului unei jumătăți de ciclu t pot exista două cazuri de lovitură: $T_p < \tau$ și $T_p > \tau$.

10.2.2. Lovitură de berbec în conductă monofilară gravitațională pentru $T_p < \tau$

Durata perturbației T_p fiind inferioară timpului unei jumătăți de ciclu, $\tau/2$, undele directe se întâlnesc cu undele inverse pe traseul conductei cu care se compun și dau naștere la suprapresiuni mai mici decât Δp . Afirmatia este valabilă porțiunii de conductă unde are loc acesta întâlnire (fig. 10.3).

Fig. 10.3. Lovitură de berbec pentru $T_p < \tau$.

Schema din desen corespunde unei perturbări uniforme în timpul T_p .

Interferența undelor directe și indirecte pe porțiunea l_2 a conductei conduce la micșorarea suprapresiunii, iar în secțiunea L toate undele directe întâlnesc unde inverse și presiunea se menține la valoarea p_0 . Pe porțiunea l_1 a conductei undele directe nu întâlnesc unde inverse, suprapresiunea ajungând la valoarea sa maximă. Asemenea situații se întâlnesc în conducte foarte lungi.

10.2.3. Lovitură de berbec în conductă monofilară gravitațională pentru $T_p > \tau$

Durata perturbației produsă de organul de închidere este superioară duratei unei jumătăți de ciclu a loviturii de berbec, $T_p > \tau$, deci toate undele directe întâlnesc pe traseul conductei unde indirecte cu care se compun.

Rezultanta impunerii undelor conduce la suprapresiune mai mică decât în cazul precedent. Fenomenul este interpretat în fig. 10.4.

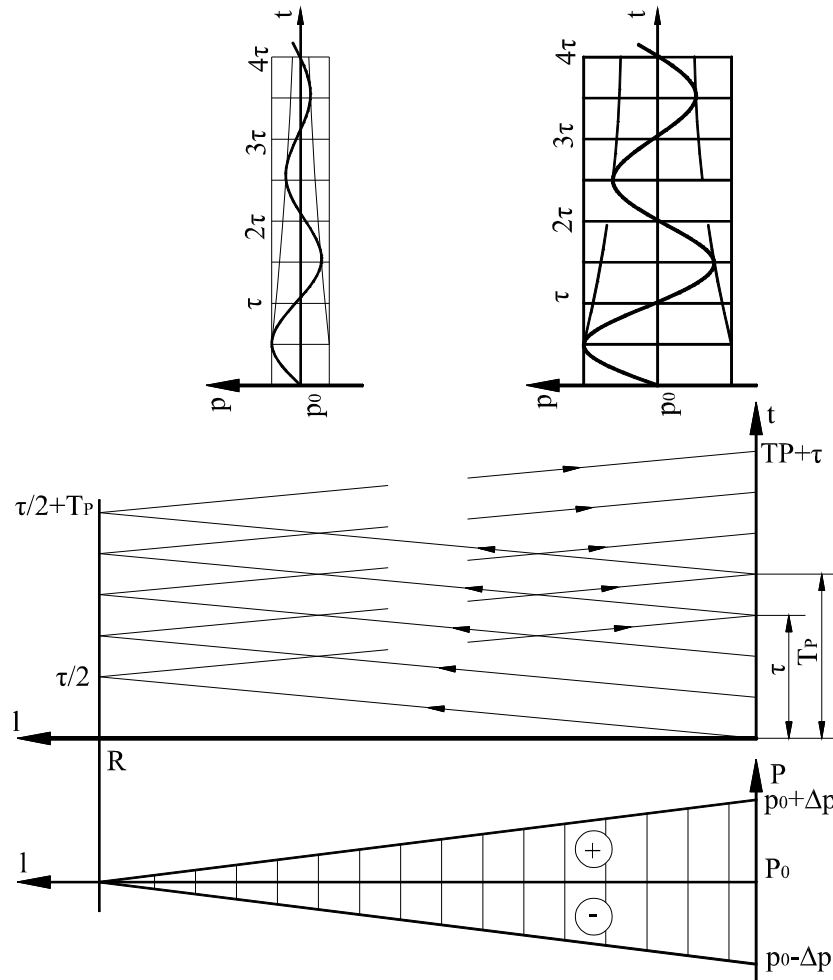


Fig. 10. 4. Lovitură de berbec pentru $T_p > \tau$.

Asemenea situații se întâlnesc la conducte scurte sau conducte lungi la care perioada perturbației este superioară lui $\tau/2$.

În cele arătate s-a evidențiat că la fenomenul loviturii de berbec trebuie să se opereze cu modelul de lichid real-greu, compresibil și vâscos. Compresibilitatea evidențiază aspectul fizic al fenomenului și presiunile extreme, iar vâscozitatea are rol de amortizare a oscilațiilor de presiune, de fapt a fenomenului însuși. Este necesar să se considere elasticitatea conductei (lucrul mecanic al forțelor elastice), care are efect asupra presiunilor extreme și asupra vitezei de desfășurare a fenomenului.

10.2.4. Viteza de propagare a undei loviturii de berbec

Viteza de propagare a undelor loviturii de berbec - **celeritatea** (c) - se calculează pe baza principiului conservării masei în mișcare nepermanentă. Astfel, pe o porțiune a conductei, în imediata apropiere a organului perturbator (robinet), în timpul dt presiunea crește cu dp . Lungimea de conductă pe care are loc creșterea presiunii în intervalul de timp dt este $ds = c \cdot dt$. Creșterea presiunii cu dp implică creșterea densității, pe seama comprimării, de la ρ la $\rho + dp$ și la deformarea secțiunii conductei de la A la $A + dA$ (fig. 10.5).

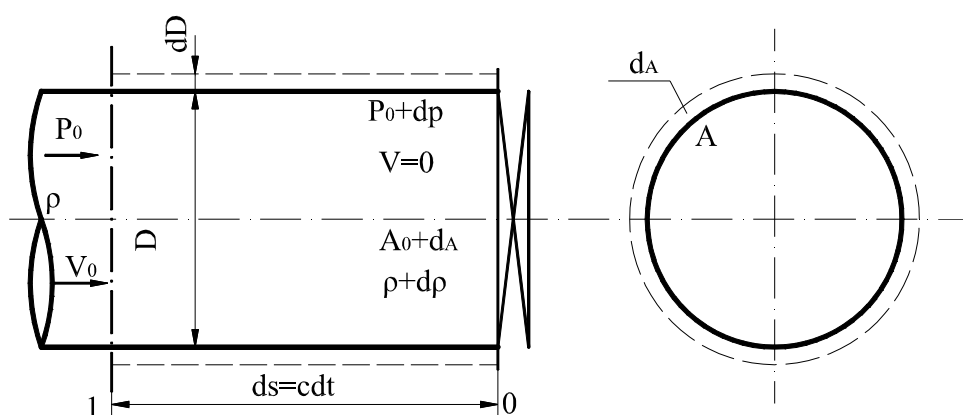


Fig. 10.5. Schemă pentru calculul celerității

În volumul Ads , în timpul dt , pe secțiunea 1 intră o masă de lichid dm_1 , care corespunde variației de masă dm_2 din volumul menționat pe seama modificării densității și a deformării secțiunii. Masa de lichid ce intră în timpul dt în volumul menționat este

$$dm_1 = \rho A V_0 dt \quad (10.1)$$

Variația masei în volumul de control este:

$$dm_2 = (\rho + d\rho)(A + dA)c dt - \rho A c dt \quad (10.2)$$

Efectuând calculul și neglijând termenii care conțin produsul a două mărimi infinitezimale, rezultă:

$$dm_2 = (\rho dA + Ad\rho) c dt \quad (10.2')$$

Din egalitatea $dm_1 = dm_2$, conform principiului conservării masei se obține

$$V_0 = c \left(\frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho} \right) \text{ sau } c = \frac{V_0}{\frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho}} \quad (10.3)$$

De la compresibilitate izotermă se cunoaște că:

$$-\frac{dW}{W} = \frac{d\rho}{\rho} = \beta dp = \frac{dp}{\varepsilon} \quad (10.4)$$

Variația secțiunii conductei este

$$\frac{dA}{A} = \frac{d\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)}{\frac{\pi D^2}{4}} = 2 \frac{dD}{D} \quad (10.5)$$

Deformația relativă a diametrului $\frac{dD}{D}$, are loc sub acțiunea creșterii presiunii, respectiv creșterii efortului unitar din peretele conductei de la σ la $\sigma + d\sigma$. Deformarea relativă a diametrului conductei, în zona elastică, sub creșterea efortului unitar cu $d\sigma$ se poate exprima din legea lui Hook, astfel

$$\frac{dD}{D} = \frac{d\sigma}{E} \quad (10.6)$$

unde E este modulul de elasticitate a materialului conductei. Din hidrostatică se cunoaște

$$\sigma = \frac{p_0 D}{2e} \quad (10.7)$$

respectiv

$$\sigma + d\sigma = \frac{(p_0 + dp)(D + dD)}{2e} \quad (10.8)$$

e - fiind grosimea peretelui conductei. Efectuând produsul din (10.8) și neglijând termenii ce conțin dD (foarte mic comparativ cu alți termeni), se obține

$$d\sigma = \frac{Ddp}{2e} \quad (10.9)$$

După înlocuirile necesare, rezultă

$$\frac{dA}{A} = \frac{D}{e} \frac{dp}{E} \quad (10.10)$$

(10.3) devenind

$$c = \frac{V_0}{\left(\frac{D}{e} \frac{\varepsilon}{E} + 1\right) \frac{dp}{\varepsilon}} \quad (10.11)$$

Celeritatea se mai poate calcula cu ajutorul ecuației teoremei impulsului, aplicată volumului de control dintre secțiunile 1 și 2, distanțate la $ds = cdt$ (fig. 10.6):

$$F = \rho Q'(\bar{V}_1 - \bar{V}_2) + \bar{F}_{p1} + \bar{F}_{p2} + \bar{G}$$

unde Q' este fluxul volumic ce se oprește, $V_2=0$ și proiecția lui $\bar{F}$ după s este

$$\rho Q' V_0 - p_0(A + dA) + (p_0 + dp)(A + dA) = 0,$$

care cu $Q' = \frac{dW}{dt} = \frac{Ads}{dt} = Ac$ și neglijând termenul $dA \cdot dp$, devine

$$dp = \rho c V_0 \quad (10.12)$$

care este relația lui Jukovski pentru suprapresiune.

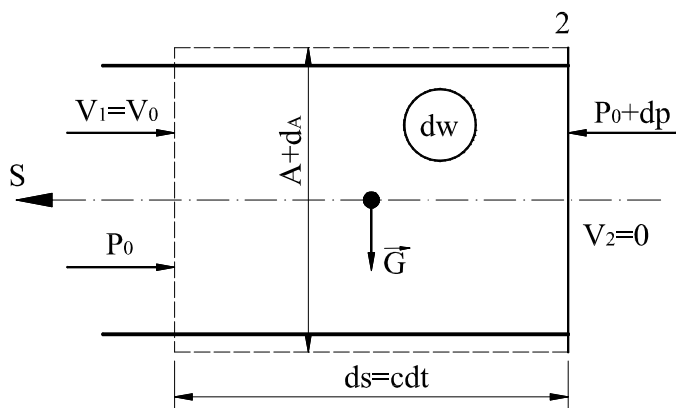


Fig. 10.6. Schemă pentru aplicarea ecuației teoremei impulsului

Înlocuind (10.12) în (10.11) se obține

$$c = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{D}{e} \frac{\varepsilon}{E}}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \frac{D}{e} \frac{\varepsilon}{E}}} \quad (10.13)$$

unde $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}} = c_0$ este viteza de propagare a sunetului în medii continui după

Newton. Pentru apă $c_0 = 1435 \text{ m/s}$, $\varepsilon = 2,06 \cdot 10^4 \text{ daN/cm}^2$. Valorile modulului de elasticitate pentru diferite materiale de conductă corespund tabelului 10.1.

Tabelul 10.1 Modulul de elasticitate a unor materiale

Nr. crt.	Materialul	E (daN/cm ²)	
		variază între	se ia în calcul
1.	oțel aparent	(2,0...2,4)10 ⁶	2,06·10 ⁶
2.	oțel îngropat		2,25·10 ⁶
3.	fonta	(7,5...8,5)10 ⁵	8·10 ⁵
4.	plumb	(1,5...1,7)10 ⁵	1,6·10 ⁵
5.	azbociment	-	1,4·10 ⁵
6.	beton	(1,5...4)10 ⁵	
7.	PVC-G		2 ·10 ⁵
8.	cauciuc		10 ²

10.2.5. Ecuațiile diferențiale ale loviturii de berbec

Calculul loviturii de berbec se bazează pe soluționarea ecuațiilor acestui fenomen, care sunt ecuația de continuitate și ecuația energiei, scrise mișcării nepermanente. În conducte cu rigiditate mare $V \ll c$, $|dA| \ll A$ și compresibilitatea mică a lichidului implică $|d\rho| \ll \rho$. Aceste constatări folosesc la simplificarea (liniarizarea) ecuațiilor, prin posibilitatea neglijării unor termeni pe baza constatărilor anterioare.

1. Ecuația de continuitate

Ecuația de continuitate poate fi dedusă din ecuația de continuitate pentru un tub de curent în mișcare nepermanentă, formal din (10.3) sau direct, scriind că variația masei de lichid în conductă între două secțiuni 1 și 2, distanțate la ds , în timpul dt este egală cu diferența între cantitatea de lichid care intră și iese din volumul de control (fig. 10.7).

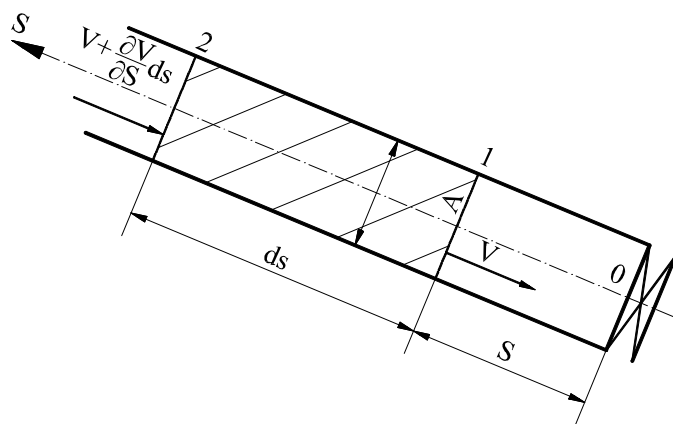


Fig. 10.7. Schemă pentru deducerea ecuației de continuitate

Variația masei de lichid în conductă între secțiunile 1 și 2, situate la distanța ds , în timpul dt (ca urmare a variației timpului, într-un spațiu dat) are expresia

$$dm_1 = (\rho + d\rho)(A + dA)ds - \rho A ds \sim (\rho dA + A d\rho)ds \quad (10.14)$$

(s-a neglijat termenul care conține produsul a două mărimi infinitezimale). În secțiunea 1, la distanța s de organul perturbator, viteza medie a lichidului este

V , iar în secțiunea 2 este $V + \frac{\partial V}{\partial s} ds$ (la același t). Diferența între cantitatea de lichid ce intră și ce iese, în și din volumul de control, este

$$dm_2 = (\rho + d\rho)(A + dA) \left(V + \frac{\partial V}{\partial s} \right) dt - (\rho + d\rho)(A + dA) V dt,$$

sau, cu neglijarea termenilor care conțin pe $d\rho$ și dA

$$dm_2 \approx \rho A \frac{\partial V}{\partial s} ds dt \quad (10.15)$$

Egalând (10.14) și (10.15), se obține

$$\frac{\partial V}{\partial s} dt = \frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho} \quad (10.16)$$

Conform (10.3, 10.11 și 10.12)

$$\frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho} = \frac{V_0}{c} = \frac{dp}{\rho c^2},$$

deci

$$\frac{\partial V}{\partial s} dt = \frac{dp}{\rho c^2} \text{ sau } \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (10.17)$$

(S-a înlocuit $\frac{dp}{dt}$ cu $\frac{\partial p}{\partial t}$ întrucât variația lui dp provine din variațiile $d\rho$ și dA , produse ca urmare a variației dt , cu $s=const.$).

2. Ecuația energiei

Pentru un curent din tub ecuația energiei în mișcarea nepermanentă, considerând $\beta = 1$, este

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + j = 0 \quad (10.18)$$

unde

$$j = \frac{\lambda}{D} \frac{V^2}{2g} = \frac{\lambda}{D} \frac{l}{2g} |V| V$$

sunt pierderile de energie. Primul termen din paranteză se mai poate scrie:

$$\frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial s} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{V}{cg} \frac{\partial V}{\partial t}$$

și datorită faptului că $V \ll c$ se poate neglija. În majoritatea cazurilor practice și j poate fi neglijat, cel puțin pentru prima oscilație, pierderile de sarcină având rolul de amortizare a fenomenului oscilatoriu. În aceste condiții (10.18), după împărțire cu g și ținând seama că s este contrar lui V , devine:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial t} \quad (10.19)$$

care este ecuația de mișcare simplificată.

3. Ecuațiile generale ale loviturii de berbec

Se urmărește eliminarea pe rând a lui V și p din ecuațiile (10.17) și (10.19). Ecuația (10.17) se derivează în raport cu ∂t , iar (10.19) în raport cu ∂s , obținând:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s \partial t} = \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

și

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s \partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + g \frac{\partial^2 z}{\partial s^2},$$

sau

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial s^2} + \gamma c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \quad (10.20)$$

Pentru conducte rectilinii $\frac{d^2 z}{ds^2} = 0$, rezultând

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial s^2} \quad (10.21)$$

Se derivează (10.17) în raport cu ∂s și (10.19) în raport cu ∂t , ceea ce permite eliminarea lui p , obținându-se

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} \quad (10.22)$$

Ecuatiile (6.21) și (6.22) sunt ecuațiile loviturii de berbec în conducte rectilinii sub formă diferențială, fiind neglijate frecările. Aceste ecuații reprezintă ecuația corzilor vibrante (fig. 10.8).

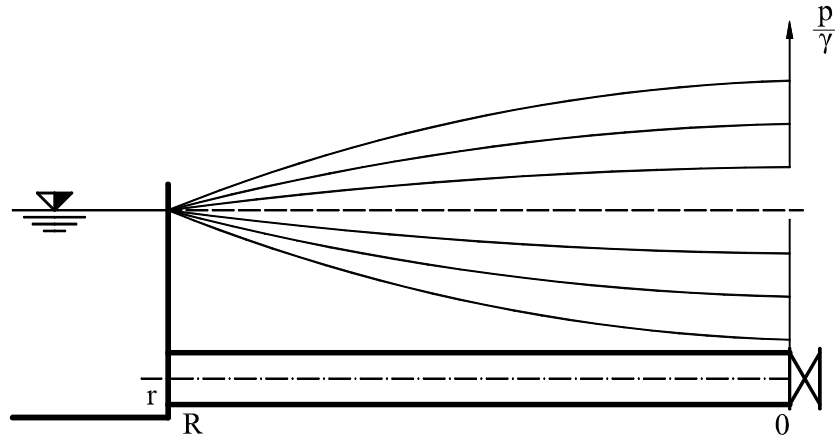


Fig. 10.8. Înfășurătorile variației presiunii pe conductă gravitațională rectilinie la lovitură de berbec

Forma canonică a ecuației (10.21) se obține făcând schimbarea de variabile

$$\xi = s - c \cdot t \text{ și } \eta = s + c \cdot t \quad (10.23)$$

rezultând

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (10.24)$$

În (10.24) p depinde de t și s prin ambele variabile noi ξ și η . Se integrează (10.24) în raport cu η .

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = F_1(\xi),$$

unde $F_1(\xi)$ este o funcție arbitrară de variabilă ξ (derivata sa în raport cu η este evident nulă). Integrând în raport cu (ξ) , se obține

$$p = \int F_1(\xi) d\xi + f(\eta) + c$$

sau

$$p = F^*(\xi) + f^*(\eta) + c \quad (10.25)$$

unde $f^*(\eta)$ este o funcție arbitrară de η , iar $F^*(\xi)$ o funcție arbitrară de ξ . Constanta de integrare rezultă din condițiile inițiale. Pentru $t=0$, în orice secțiune s , se pune condiția $F^*(\xi)$ și $f^*(\eta)=0$. Variabila p ia valorile $p = p_0$, unde p_0 poate fi o funcție de s . Rezultă $c = p_0$, deci

$$p - p_0 = F^*(\xi) + f^*(\eta) \quad (10.25')$$

Revenind la variabilele inițiale avem:

$$p - p_0 = F^*(s - c \cdot t) + f^*(s + c \cdot t) \quad (10.26)$$

funcțiile $F^*(s - c \cdot t)$ și $f^*(s + c \cdot t)$ fiind funcții arbitrare. Ele se determină din condițiile la limită.

Cunoscând soluția pentru p , soluția ecuației (10.22) se obține pe baza fig. 10.9 asemănător cazului precedent.

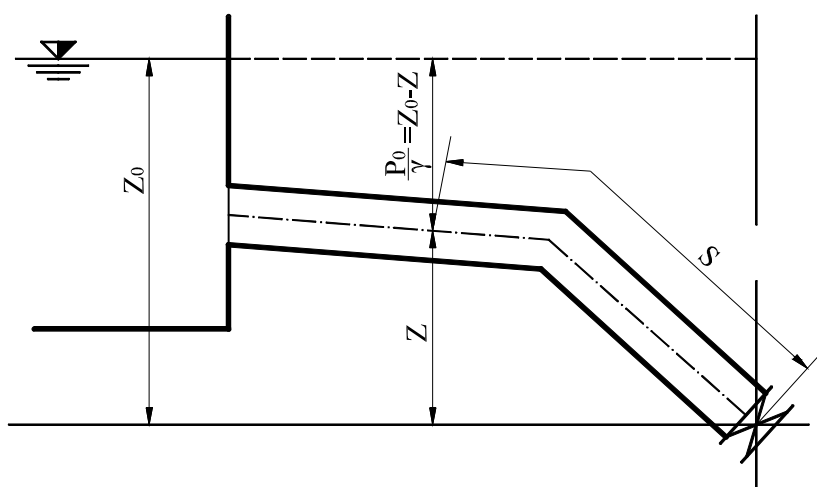


Fig. 10.9. Schemă pentru soluționarea ecuației (10.22)

Pentru conducta formată din tronsoane rectilinii, presiunea p_0 , la momentul $t=0$, are expresia

$$p_0 = \gamma(z_0 - z)$$

Se derivează ecuația (10.26) în raport cu s

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial p_0}{\partial s} + \frac{\partial F^*}{\partial s} + \frac{\partial f^*}{\partial s},$$

însă

$$\frac{\partial p_0}{\partial s} = -\gamma \frac{\partial z}{\partial s}, \text{ fiindcă } z_0 = \text{constant},$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial s} = \frac{\frac{\partial F^*}{\partial t}}{\frac{\partial (s - c \cdot t)}{\partial t}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial F^*}{\partial t},$$

și

$$\frac{\partial f^*}{\partial s} = \frac{\frac{\partial f^*}{\partial t}}{\frac{\partial (s + c \cdot t)}{\partial t}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial f^*}{\partial t},$$

deci

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\gamma \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{1}{c} \left(\frac{\partial F^*}{\partial t} - \frac{\partial f^*}{\partial t} \right) \quad (10.27)$$

Înlocuind (10.27) în (10.19), avem:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{\rho c} \left[\frac{\partial F^* (s - ct)}{\partial t} - \frac{\partial f^* (s + ct)}{\partial t} \right] \quad (10.28)$$

care integrată devine:

$$V - V_0 = -\frac{1}{\rho c} [F^* (s - ct) - f^* (s + ct)] \quad (10.29)$$

unde V este viteza în secțiunea s la momentul t , iar V_0 viteza în aceeași secțiune în momentul inițial $t = 0$.

4. Sensul fizic al funcțiilor F și f

Se analizează cazul particular când $f^* = 0$ și $F^* = 0$. Dacă în două secțiuni diferite s_1 și s_2 există relația de parcurgere uniformă a spațiului s cu viteza c :

$$s_1 - c \cdot t_1 = s_2 - c \cdot t_2$$

sau

$$s_2 - s_1 = c(t_2 - t_1) \quad (10.30)$$

presiunea este aceeași, fiindcă $F^*(s_1 - c \cdot t_1) = F^*(s_2 - c \cdot t_2)$.

Dacă $t_2 > t_1$, rezultă $s_2 > s_1$. Prin urmare, funcția F^* reprezintă **unda directă de presiune** care se propagă cu viteza c și care păstrează o valoare constantă în lungul conductei (s-au neglijat pierderile de sarcină).

Procedând în mod analog, făcând $F^* = 0$ și $f^* \neq 0$, rezultă că la două momente diferite $t_2 > t_1$ presiunea are aceeași valoare în două secțiuni diferite s_1 și s_2 , dacă sunt îndeplinite condițiile

$$s_1 + c \cdot t_1 = s_2 + c \cdot t_2$$

sau

$$s_1 - s_2 = c(t_2 - t_1) \quad (10.31')$$

Însă $t_2 > t_1$, înseamnă $s_2 < s_1$, deci funcția f^* reprezintă **unda inversă**, care, se propagă cu viteza c și păstrează o valoare constantă în lungul conductei.

Din cele arătate rezultă că unda de presiune $F^*(s - ct)$, la un moment dat $t = t_1$, are o distribuție $F^*(s - ct_1)$ în lungul axului s ; se propagă fără deformare în sensul $+s$ cu viteza c , astfel că $F^*(s - ct_2)$ se obține printr-o translare a lui $F^*(s - ct_1)$ pe distanța $c(t_2 - t_1)$, (fig. 10.10. a).

În mod asemănător se întâmplă cu unda $f^*(s + ct)$ în sensul $-s$, unde $f^*(s + ct_2)$ se obține prin translarea $f^*(s + ct_1)$ pe distanța $-c(t_2 - t_1)$, fig. 10.10. b.

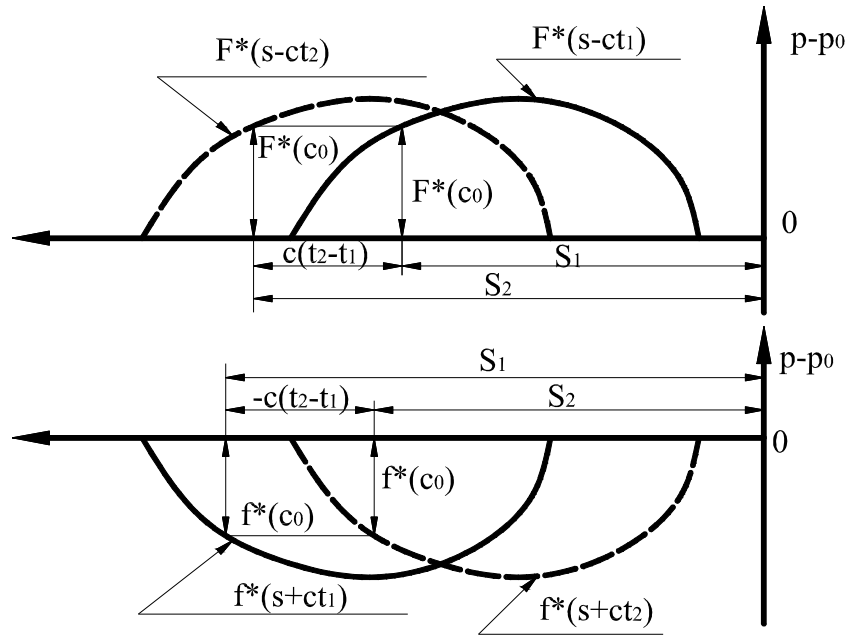


Fig. 10.10. Deplasarea în lungul conductei a undelor de presiune.
a-directe; b-inverse

Relațiile (10.30 și 10.31) arată că mișcarea undelor de presiune este uniformă, fapt ce are importanță în soluția grafică a loviturii de berbec și în interpretarea rezultatelor calculelor.

În anumite condiții limită, între funcțiile F^* și f^* există relații simple. Pentru conductă alimentată de rezervor cu nivel constant aceste relații sunt:

a) pentru $s = L$; $p = P_0 = \gamma h_0$, iar (10.26) arată

$$F^*(L - ct) + f^*(L + ct) = 0 \quad (10.31)$$

b) o condiție asemănătoare se poate scrie între funcții pentru o distanță oarecare s , cu modificarea corespunzătoare a argumentelor. Se poate alege un timp t_1 astfel ca

$$s + ct_1 = L + ct \quad (10.32)$$

și un alt timp $(t_1 - \tau_s)$ astfel ca

$$s - c(t_1 - \tau_s) = L - ct \quad (10.33)$$

păstrându-se valabilă relația (10.31). Din cele două condiții anterioare rezultă:

$$\tau = \frac{2(L-s)}{c} \quad (10.34)$$

pentru care:

$$F^* [s - c(t_1 - \tau_s)] + f^*(s + ct_1) = 0,$$

deci la un moment dat t funcția f^* are valoarea $-F^*$, corespunzătoare momentului $t - \tau_s$, deci în orice secțiune f^* repetă valoarea F^* , însă cu semn schimbat și cu un decalaj de timp τ_s . Valoarea lui τ_s pentru o secțiune s este timpul de reflexie a undei directe - necesară parcurgerii distanței din secțiune până în R și invers. În aceste condiții (10.26 și 10.29), devin

$$p - p_0 = F^*(s - c \cdot t) - F^*[s - c(t - \tau_s)] \quad (10.35)$$

și

$$V - V_0 = -\frac{1}{\rho c} \{ F^*(s - ct) + F^*[s - c(t - \tau_s)] \} \quad (10.36)$$

Funcțiile F^* și f^* au fost definite pentru $t \geq 0$ (pentru $t < 0$ sunt nule), rezultă că $F^*[s - c(t - \tau_s)]$ intervine în secțiunea s numai dacă $t < \tau_s$. Pentru $t < \tau_s$ secțiunea s se găsește sub influența undei directe și în acest interval de timp $F^*[s - c(t - \tau_s)] = 0$. Pentru $t > \tau_s$ secțiunea s este sub influența undei inverse. În cazul considerat, unda directă creează o suprapresiune, iar unda inversă descarcă presiunea, cele două unde fiind de semn contrar.

Pentru $t < \tau_s$ (10.35 și 10.36) devin

$$p - p_0 = F^*(s - c \cdot t) \quad (10.35')$$

și

$$V - V_0 = -\frac{1}{\rho c} [F^*(s - ct)] \quad (10.36')$$

sau

$$p - p_0 = \rho c (V_0 - V) \quad (10.37)$$

care are valoare maximă pentru $V=0$, deci

$$\Delta p = p - p_0 = \rho c V_0 \quad (10.12)$$

relația lui Jukovski.

Valoarea lui Δp este pozitivă când $V_0 > V$, la închiderea robinetului din O și negativă pentru $V_0 < V$, pentru deschiderea robinetului. Valoarea suprapresiunii depinde numai de valorile inițiale și finale ale vitezei V , nu și de legea după care aceasta variază.

Dacă $T_p < \tau_s$, în secțiune se obține suprapresiunea maximă, însă când $T_p > \tau_s$ în secțiune suprapresiunea este mai mică, fiindcă acolo apare și unda inversă. Pentru secțiunea O a robinetului $s=0$ și $\tau_s = \tau = \frac{2L}{c}$ și unda inversă apare

după timpul $t = \tau$. În secțiunea rezervorului (R), $s=L$ și unda inversă apare odată cu unda directă - are loc reflectarea undei - unda directă se transformă în undă inversă.

Un alt caz, la care se pot stabili relații între F^* și f^* , la limită, este conducta închisă la un capăt, la celălalt capăt acționând un piston (fig. 10.11).

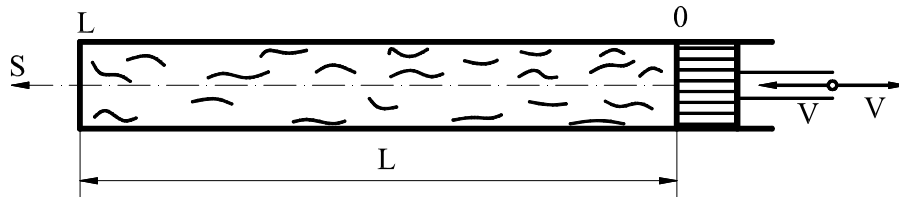


Fig. 10.11. Conductă închisă cu lichid, acționat de piston

La capătul închis al conductei se poate scrie: $V=V_0=0$ și din ecuația (10.29) se obține:

$$F^*(s-ct) - f^*(s+ct) = 0 \quad (10.38)$$

Într-o secțiune s , pe baza relațiilor (10.30 și 10.31), se obține:

$$f^*(s+ct) = F^*[s-c(t-\tau_s)] = 0 \quad (10.39)$$

deci, în secțiunea s la momentul t , f^* ia valoarea F^* de la momentul $t - \tau_s$. Funcția f^* repetă valorile F^* în secțiune cu un decalaj de timp τ_s . Ecuațiile (10.26 și 10.29) devin:

$$p - p_0 = F^* (s - c \cdot t) + F^* [s - c \cdot (t - \tau_s)] \quad (10.26'')$$

$$V - V_0 = -\frac{1}{\rho c} \{ F^* (s - ct) - F^* [s - c(t - \tau_s)] \} \quad (10.29'')$$

Pentru $s=L$ rezultă $\tau_s = 0$ și unda directă de presiune se reflectă în unda inversă de același semn. La asemenea situații compunerea undelor poate conduce la pericole, prin realizarea unor supra sau subpresiuni foarte mari, care pot distruge sistemul hidraulic în lipsa unor mijloace de protecție.

Uneori este mai comod ca în ecuații presiunile să fie exprimate în înălțime de coloană de lichid $\left(h = \frac{p}{\gamma} \right)$, iar viteza cu ajutorul debitului $\left(V = \frac{Q}{A} \right)$. Notând cu

$$F = \frac{F^*}{\gamma}; \quad f = \frac{f^*}{\gamma} \quad \text{și} \quad m = \frac{c}{gA}, \quad (10.40)$$

ecuațiile (10.26 și 10.29) devin:

$$h - h_0 = F(s - c \cdot t) + f(s + ct) \quad (10.41)$$

și

$$-m(Q - Q)_0 = F(s - ct) - f(s + ct) \quad (10.42)$$

unde m este rezistența de undă. În relațiile de mai sus F și f sunt lungimi. De fapt se poate concluziona că la o undă de presiune corespunde și o undă de debit și că cele două unde sunt asociate.

10.2.6. Reflexia și refracția undelor

În paragraful precedent s-au analizat două cazuri (extreme):

a) când în secțiunea R , de legătură cu rezervor cu nivel constant, unda se reflectă cu aceeași intensitate și semn schimbat;

b) capătul etanș închis al conductei (L), unde unda se reflectă tot cu aceeași intensitate cu același semn.

În primul caz, secțiunea de curgere crește brusc de la o valoare finită la o valoare infinită (sau foarte mare), iar în al doilea caz, secțiunea de curgere se reduce de la o valoare oarecare la zero.

Într-un caz intermediar, la o îngustare sau lărgire bruscă, dar finită de secțiune, unda de presiune suferă un proces de **reflexie** și de **refracție**.

Se consideră o variație bruscă de secțiune pe traseul unei conducte (fig. 10.12). O undă directă F_1 se deplasează din secțiunea A spre B; în secțiunea C întâlnește o variație bruscă de secțiune, unde unda F_1 parțial se reflectă - sub forma undei f_1 - și parțial se refractă în F_2 .

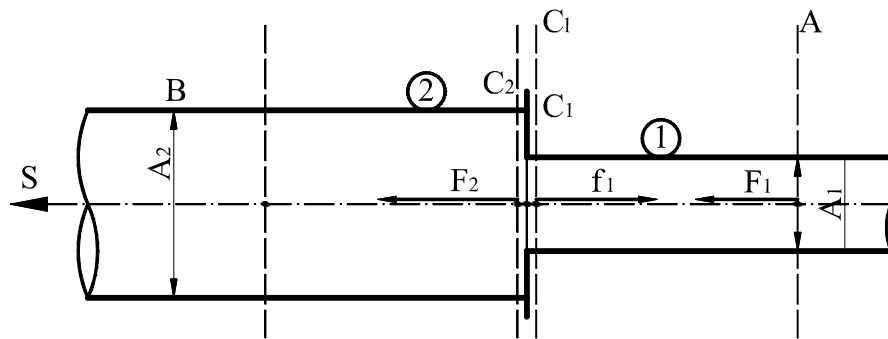


Fig. 10.12. Reflexia și refracția undelor de presiune

Fie C_1 și C_2 două secțiuni de o parte și alta a secțiunii C, infinit apropiate, aparținând conductei 1, respectiv 2. Presiunile și debitele în secțiunile C_1 și C_2 sunt egale în orice moment, deci

$$\begin{aligned} h_1 - h_{01} &= F_1 + f_1 \\ -m_1(Q_1 - Q_{01}) &= F_1 - f_1 \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} h_2 - h_{02} &= F_2 \\ -m_2(Q_2 - Q_{02}) &= F_2 \end{aligned}$$

Fie $f_1 = k' F_1$ și $F_2 = k F_1$, cu k' - coeficient de reflexie și k - coeficient de refracție. Respectând condițiile $h_{01} = h_{02}$; $h_1 = h_2$; $Q_{01} = Q_{02}$, din egalitatea presiunilor se obține

$$F_1 + f_1 = F_2,$$

sau

$$1 + k' = k \quad (10.43)$$

iar din egalitatea debitelor

$$\frac{F_1 - f_1}{m_1} = \frac{F_2}{m_2} \text{ sau } \frac{1 - k'}{m_1} = \frac{k}{m_2} \quad (10.44)$$

Din (10.43 și 44) se obțin

$$k = \frac{2m_2}{m_2 + m_1} = \frac{2 \frac{C_2}{A_2}}{\frac{C_2}{A_2} + \frac{C_1}{A_1}} \quad (10.45)$$

respectiv

$$k' = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} = \frac{\frac{C_2}{A_2} - \frac{C_1}{A_1}}{\frac{C_2}{A_2} + \frac{C_1}{A_1}} \quad (10.46)$$

În cazurile particulare, tratate anterior, rezultă:

- conductă legată la rezervor: $A_2 = \infty, k' = -1; k = 0$;
- conductă închisă la un capăt: $A_2 = 0, k' = 1; k = 0$. Coeficientul de reflexie este nul ($k'=0$) numai pentru $m_1=m_2$.

10.2.7. Metoda caracteristicilor pentru calculul loviturii de berbec

În timp s-au elaborat mai multe metode de soluționare a loviturii de berbec în cazuri concrete, mai simple sau mai complicate, cum sunt cele elaborate de Allievi, Morozov, Evangelisti, Jaeger, Conti, de Marchi, Schnyder, Bergeron etc. sub formă analitică sau grafică. Aceste metode au mai mult caracter istoric, pentru că după perfecționarea metodei grafice (Schnyder-Bergeron) și numerice, ale caracteristicilor, nu se mai apelează la ele.

10.2.7.1. Metoda grafică a caracteristicilor

Acesta metodă se caracterizează prin relații de calcul simple și cu evident sens fizic. Se poate introduce în calcule și efectul forțelor de frecare. Ecuațiile caracteristice se soluționează pe cale grafică, cu precizia specifică acestei rezolvări.

1. Curbe caracteristice în mișcarea permanentă

La mișcarea permanentă a lichidelor în instalații hidraulice, dependența între debit și presiune într-o secțiune dată (la diferite debite, variabil, continuu în intervalul dat) este curba caracteristică a instalației. De exemplu o conductă alimentată gravitațional dintr-un rezervor, caracteristica în planul figurativ $Q-h$ este

$$h = h_0 - MQ^2 \quad (10.47)$$

unde M este modulul de rezistență echivalent (s-a neglijat termenul cinetic) (fig. 10.13). De obicei o astfel de conductă conlucrează cu un robinet la capătul aval, care are caracteristica

$$Q = k_R \left(\frac{a}{D} \right) \sqrt{h} \quad (10.48)$$

Intersecția caracteristicii conductei cu caracteristica robinetului este punctul de funcționare al instalației.

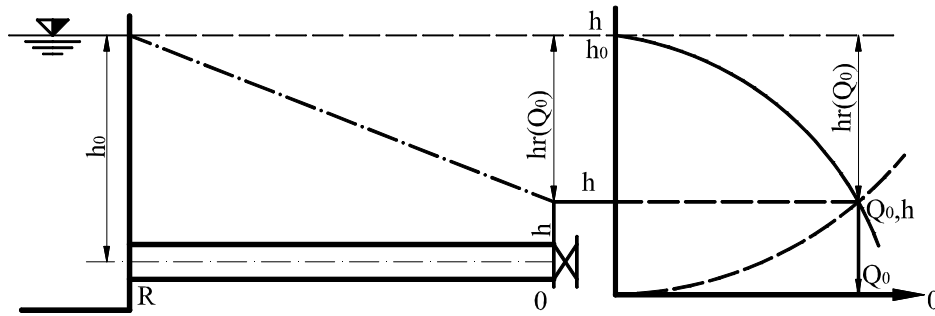


Fig. 10.13. Caracteristica conductei gravitaționale cu robinet de capăt aval

Caracteristica robinetului depinde de gradul de închidere (a/D) și poate ocupa în mod continuu tot cadranul $Q-h$. Mai mult, închiderea robinetului poate fi descrisă de o funcție de timp.

O conductă alimentată prin pompare, cu refulare în rezervor (fig. 10.14), are caracteristica

$$h = H_g + MQ^2 \quad (10.49)$$

iar punctul de funcționare se obține prin intersecția cu caracteristica internă a grupului de pompare

$$Q = f(h) \quad (10.50)$$

Pompa la diverse turații n își modifică caracteristica, turația putând fi funcție de timp. Legătura mărimilor caracteristice ale pompei centrifugale funcție de modificarea turației este:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{n}{n_0}; \frac{h}{H_0} = \frac{n^2}{n_0^2}; \frac{N}{N_0} = \frac{n^3}{n_0^3}; \eta = 1 - (1 - \eta) \left(\frac{n}{n_0} \right)^{0.2} \quad (10.51)$$

Caracteristica pompei la diferite turații rezultă din topograma pompei, care conține curbele de sarcină, putere, randament și NPSH.

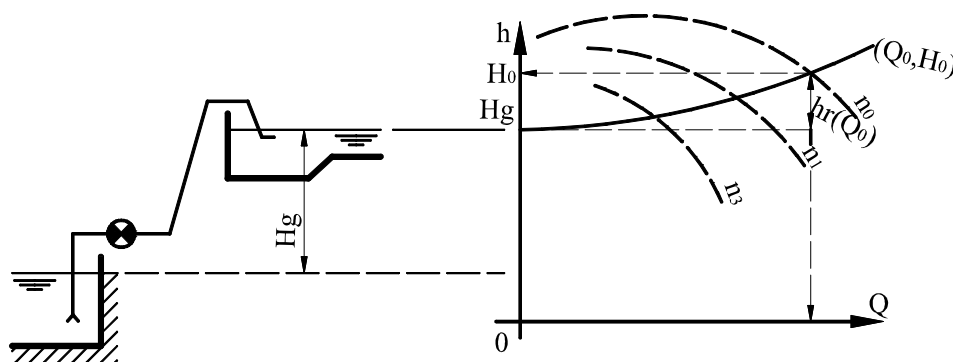


Fig. 10. 14. Caracteristica conductei de pompare

2. Curbe caracteristice în mișcare nepermanentă

În mișcare nepermanentă curbele caracteristice ale unui sistem hidraulic se modifică în timp: în orice secțiune I atât Q cât și h pot avea diverse valori. Problema este găsirea acestor valori.

Undele de presiune și de debit la mișcarea nepermanentă au caracteristicile (10.41), respectiv (10.42). Aceste două funcții leagă patru necunoscute Q , h , F și f .

Se consideră o conductă rectilinie ($O;R$), cu organul perturbator în secțiunea O și o secțiune I , aflată la distanța l de O (fig. 10.15). Timpul necesar undei directe ca să ajungă în I (măsurat de la momentul perturbării $t=0$) este τ_i . Dacă se cunosc F și f din (10.41 și 10.42) se pot determina (Q , h) în punctul I în momentul τ_i .

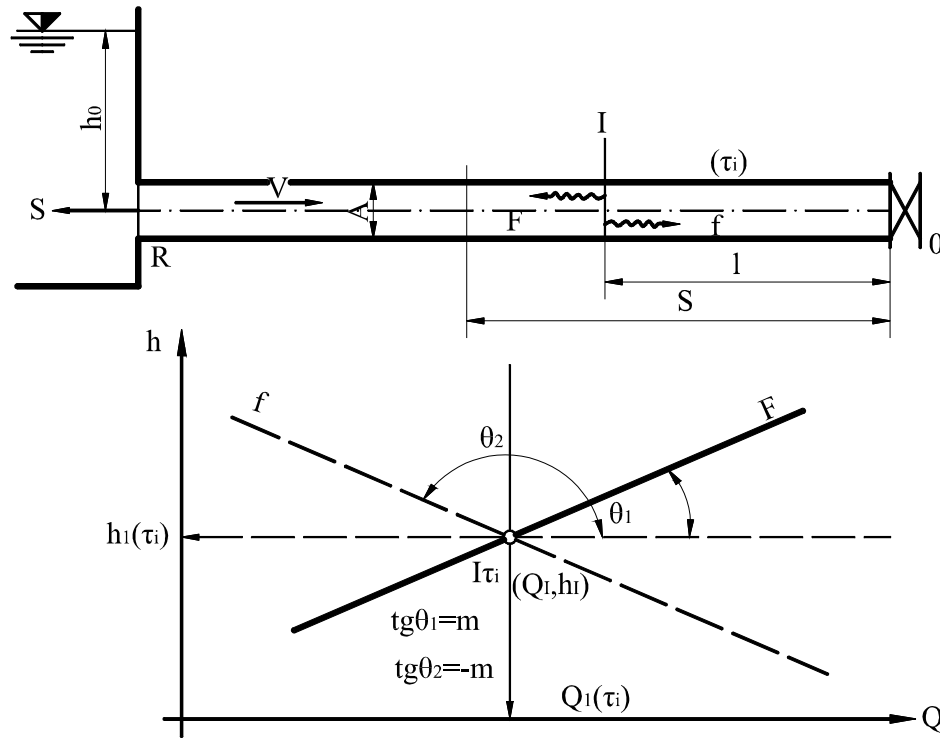


Fig. 10.15. Explicarea caracteristicilor loviturii de berbec

În planul figurativ $Q-h$, punctul figurativ $I(Q, h)_{\tau_i}$ arată dependența debitului de sarcină.

Se presupune că un observator se deplasează cu viteza c în lungul conductei în sensul pozitiv al lui s , împreună cu unda F și la un moment dat $t > \tau_i$ este la distanța $s > l$ de la O . Distanța s este l plus drumul parcurs de undă cu celeritatea c , în timpul $t - \tau_i$ adică

$$s = l + c(t - \tau_i) \quad (10.52)$$

înlocuind s în argumentul lui F se obține

$$F(s - c \cdot t) = F_l(l + c \cdot t - c \cdot \tau_i - c \cdot t) = F_l(l - c \tau_i) = \text{const.} \quad (10.53)$$

deci pentru observatorul mobil, care pleacă din I cu unda F , aceasta va avea o valoare constantă. Observatorului care se deplasează cu unda F îi sunt valabile numai trei din cele patru mărimi Q , h , F și f , putând scrie

$$\begin{cases} h - h_0 = F_I - f \\ -m(Q - Q_0) = F_I - f \end{cases} \quad (10.53')$$

Adunând cele două ecuații avem:

$$h - h_0 - m(Q - Q_0) = 2F_I = \text{constant} \quad (10.54)$$

Ecuația (10.54) este valabilă pentru orice secțiune de pe conductă, deci și în I, unde sunt caracteristice în momentul τ_i parametrii (Q_i, h_i) , deci

$$h_i - h_0 - m(Q_i - Q_0) = 2F_I \quad (10.55)$$

Scăzând (10.55) din (10.54) se obține

$$h - h_i = m(Q - Q_i) \quad (10.56)$$

Ecuația este o dreaptă caracteristică în planul Q, h pentru observatorul menționat în punctul I, corespunzător momentului τ_i . Dreapta are coeficientul unghiular $m = \frac{c}{gA}$.

În mod analog se poate arăta pentru unda f

$$s = l - c(t - \tau_i),$$

respectiv

$$f(s + ct) = f(l - ct + c\tau_i + ct) = f(l + c\tau_i) = \text{constant} \quad (10.57)$$

și

$$\begin{cases} h - h_0 = F + f_I \\ -m(Q - Q_0) = F - f_I \end{cases} \quad (10.58)$$

Scăzând ecuațiile, rezultă

$$h - h_0 + m(Q - Q_0) = 2f_I \quad (10.59)$$

care este valabilă pe toată conducta și în I în momentul τ_i

$$h_I - h_0 + m(Q_I - Q_0) = 2f_I \quad (10.60)$$

Scăzând (10.60) din (10.59), se obține

$$h - h_I = m(Q - Q_I) \quad (10.61)$$

care este a doua dreaptă caracteristică, având coeficient unghiular $-m = -\frac{c}{gA}$.

Dreptele F și f sunt simetrice față de o orizontală ce trece prin punctul I_{τ_i} . Interpretarea fizică a caracteristicilor (10.56) și (10.61) este: dacă un observator pleacă din punctul I la momentul τ_i , unde regimul de funcționare era $(Q_I, h_I)_{\tau_i}$ și se deplasează cu celeritatea c cu unda F sau f , constată că în orice secțiune de pe conductă debitul Q și presiunea h se găsesc într-o relație liniară (de forma (10.56) dacă urmărește unda F și (10.61) dacă urmărește unda f), care depinde de celeritate, de secțiunea conductei și de parametrii inițiali ai mișcării.

Având dreptele caracteristice ale loviturii de berbec, toate calculele se pot efectua în planul Q, h cu condiția să se cunoască în fiecare moment t poziția curbelor caracteristice ale instalației în secțiunile de margine și starea mișcării în momentul inițial.

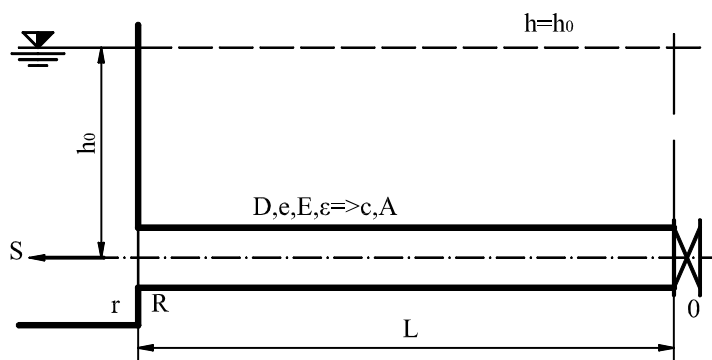
3. Exemplificări când se neglijează pierderile de sarcină

a. Lovitură de berbec în conductă simplă gravitațională

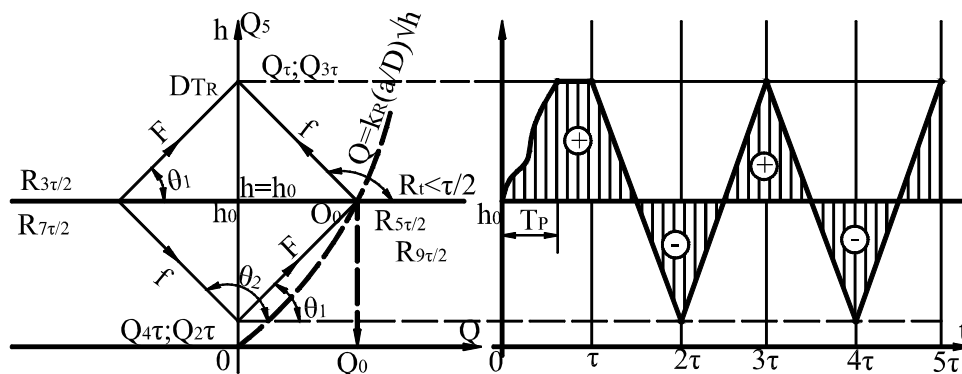
Se consideră o conductă alimentată gravitațional, prevăzută cu un robinet în capătul aval. Se cunoaște A, c și caracteristica robinetului (fig. 10.16). Caracteristica conductei, când se neglijează pierderile de sarcină, în mișcarea permanentă, este:

$$h = h_0$$

în orice punct al conductei. Caracteristica robinetului este (10.48), cu deschiderea relativă, a/D dată și constantă în regim permanent. Se disting două cazuri de lovitură în funcție de mărimea T_p față de τ .

Fig. 10.16. Schema
conduței gravitaționale

a.l) Cazul $T_p < \tau$. Intersecția curbei caracteristice a conductei cu caracteristica robinetului furnizează parametrii inițiali ai mișcării (Q_0, h_0) care sunt valabili la robinet (pct.O) în momentul $t=0$ și secțiunilor R și r pe intervalul $t=(0 \dots \tau/2)$, deci punctul figurativ O_0 și $R_{0 \dots \tau/2}$ se confundă în planul Q, h (fig. 10.17).

Fig. 10.17. Soluția grafică a loviturii de berbec în conductă gravitațională
cu robinet pentru $T_p < \tau$

Dacă un observator pleacă cu unda inversă de la R la $\tau/2$ ajunge la robinet (în O) la momentul τ , găsind robinetul închis. Caracteristica robinetului închis este $Q=0$. Deci, unda f cu coeficientul unghiular $m = -\frac{c}{gA}$ trece prin punctul $R_{\tau/2}$ și intersectează caracteristica robinetului închis la momentul τ (în pct. O). De fapt această suprapresiune se obține în O când robinetul s-a închis ($t = T_p$). Punctul O_{T_p} se obține plecând cu unda f din R la momentul $T_p - \tau$, care coincide tot cu punctul de funcționare. Creșterea presiunii în O urmărește

o lege după legea de închidere a robinetului. Presiunea maximă în O se menține de la T_p la τ ; în momentul τ sosește prima undă inversă și produce scăderea presiunii. În momentul τ , în pct. O, unda f se reflectă în undă F și ajunge la R în momentul $3\tau/2$ și are coeficient unghiular $m = \frac{c}{gA}$. Deci, unda F trece prin

punctul figurativ O_τ și intersectează caracteristica conductei $h = h_0$ în punctul $R_{3\tau/2}$. Aici unda F se reflectă în f și întâlnește caracteristica robinetului închis la momentul 2τ în $O_{2\tau}$. În $O_{2\tau}$ unda f se reflectă în F și întâlnește caracteristica conductei $h = h_0$ în momentul $5\tau/2$, în punctul $R_{5\tau/2}$ unda F se reflectă în f care întâlnește caracteristica robinetului închis la momentul 3τ în $O_{3\tau}$. Pierderile de sarcină fiind neglijate, oscilațiile de presiune se mențin în continuare la valori identice, fenomenul se repetă cu perioada 2τ . În partea a doua a fig. 10.17 este reprezentată variația presiunii la robinet (pct. O) în timp.

a.2) Cazul $T_p > \tau$. În această situație undele f care se întorc de la R în O întâlnesc robinetul în proces de închidere, care are caracteristica dată momentului respectiv, prin gradul de deschidere. Pentru simplificarea explicației se presupune că timpul de perturbare (închiderea robinetului) are loc într-un timp multiplu de τ , $T_p = 4\tau$. Presupunem cunoscute caracteristicile robinetului în procesul de închidere în orice moment și se construiesc aceste caracteristici la momentele 0 ; τ ; 2τ ; 3τ , în momentele $t \geq 4\tau$ robinetul este închis, având caracteristica $Q=0$. În planul figurativ Q , h se trasează caracteristica conductei, $h = h_0$ și caracteristicile robinetului în momentele menționate (fig. 10.18).

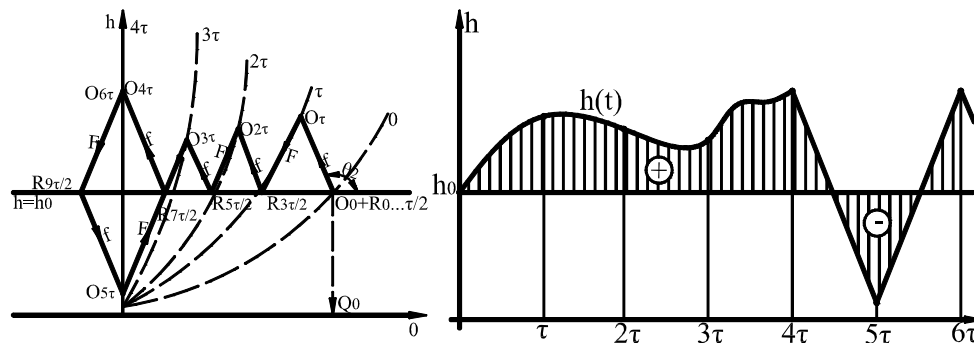


Fig. 10.18. Soluția grafică a loviturii de berbec în conductă gravitațională cu robinet la capăt pentru $T = 4\tau$

Punctele figurative $O_0, R_{0... \tau/2}$ se găsesc în punctul de funcționare inițial (Q_0, h_0) . Pentru a determina variația presiunii în O se presupune un observator care vine odată cu unda f din R în momentul $\tau/2$ spre O unde ajunge în momentul τ și întâlnește robinetul cu caracteristica modificată, corespunzătoare momentului τ . Dreapta caracteristică undei f (coeficient unghiular $m = -\frac{c}{gA}$) trece prin punctul $R_{\tau/2}$ și intersectează caracteristica robinetului la $t = \tau$, unde se află punctul figurativ O_τ . Aici unda se reflectă în F (cu coeficient unghiular $m = -\frac{c}{gA}$) și întâlnește caracteristica conductei ($h = h_0$) în momentul $3\tau/2$. Intersecția undei F cu $h = h_0$ este punctul $R_{3\tau/2}$, de unde unda F se reflectă în f care ajunge la robinet la momentul 2τ . Intersecția undei f cu caracteristica robinetului la momentul 2τ este punctul figurativ $O_{2\tau}$. În mod analog se obțin celelalte puncte figurative. Ordonatele punctelor figurative O la momente multiplu de τ reprezintă variația presiunii în timp la robinet (pct.O), (fig. 10.18).

b. Se consideră o **conductă gravitațională, formată din două sectoare**, cu lungime și diametre diferite, cu un robinet în capătul aval. Cunoscând $D_1, D_2, l_1, l_2, c_1, c_2$ și caracteristicile robinetului la închidere să se determine presiunile în punctele O și I când se neglijează pierderile de sarcină (fig. 10.19).

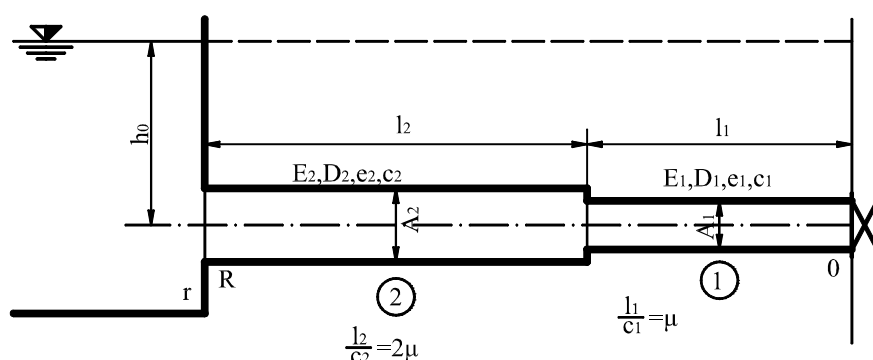


Fig. 10.19. Schema conductei sectorizate cu alimentare gravitațională

Se presupune că timpul de reflexie de pe sectorul 2 este multiplu al timpului de reflexie de pe sectorul 1, $\tau_2 = 2\tau_1$. Se adoptă unitate de timp jumătate din timpul de reflexie de pe sectorul 1

$$\mu = \frac{\tau_1}{2} = \frac{l_1}{c_1}$$

În planul $Q-h$ se reprezintă caracteristica conductei $h = h_0$ și caracteristicile robinetului pentru multiplu de μ presupunând că $T_p = 10\mu$. Intersecția caracteristicii conductei cu caracteristica robinetului la timpul $t=0$ este punctul de funcționare în regim permanent. Indicile punctului figurativ va reprezenta timpul în multiplu de μ . Punctele figurative O_0, I_1 și R_3 corespund regimului inițial de curgere cu parametrii (Q_0, h_0) , (fig. 10.20).

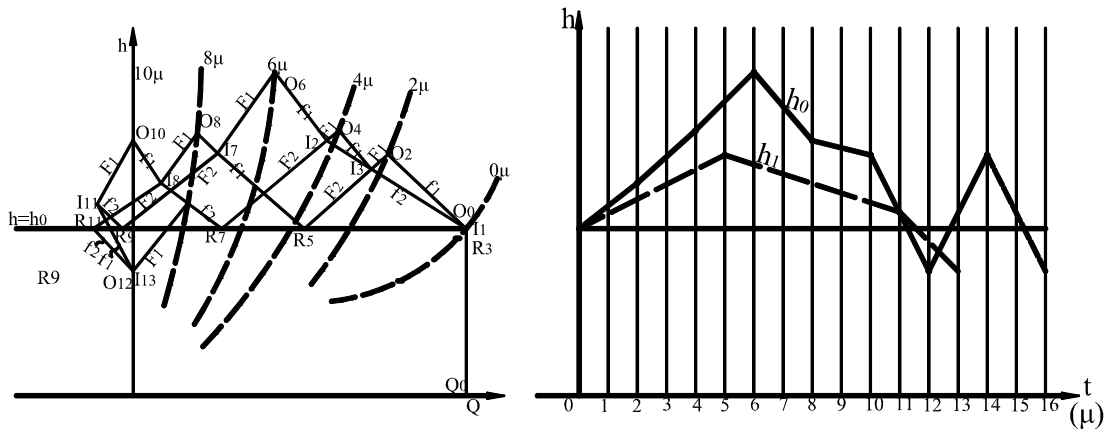


Fig. 10.20. Soluția grafică a loviturii de berbec în conductă gravitațională tronsonată $T_p > \tau = 10\mu$

Pentru a determina punctul figurativ O_2 se trasează caracteristica undei f_1 care trece în I_1 în momentul 1 și ajunge în O la momentul 2, deci intersecția cu caracteristica robinetului în momentul 2. Punctul figurativ I_3 este pe caracteristica undei F_1 ce pleacă din O_2 la momentul 2 la intersecția undei f_2 , care pleacă din R în momentul 1. Punctul R_5 se găsește la intersecția undei F_2 care pleacă din I_3 în momentul 3 și caracteristica conductei $h = h_0$, unda ajunge în R în momentul 5.

Celelalte puncte $O_4, O_6, O_8, O_{10}, O_{12}, \dots, I_5, I_7, I_9, I_{11}, \dots, R_7, R_9, R_{11} \dots$ se găsesc după raționamentul analog cu cel descris.

Reflexia și refracția undelor este oglindită de construcția grafică. În punctul I , F_1 și f_1 reprezintă unda directă și inversă reflectată, iar F_2 unda directă refractată. În punctul I debitele și presiunile pe oricare din caracteristicile F_1, f_1, F_2, f_2 sunt

egale. În intensitate undele f_1 și F_2 sunt proporționale cu F_1 în raport de coeficienții de reflexie și refracție (10.45 și 10.46).

c. Lovitura de berbec în instalațiile de pompare

În instalații de pompare lovitură de berbec apare ca urmare a unor accidente sau manevrări bruște a robinetilor. Cele mai frecvente și mai periculoase sunt loviturile de berbec datorită întreruperii alimentării cu energie electrică. După întreruperea curentului electric, datorită inerției părții rotative a agregatului de pompare și coloanei de lichid în conductă, pompa trece prin trei regimuri de funcționare:

- regim de pompare, însă cu turație descrescândă și $n > 0$, respectiv $Q > 0$;
- regim de frânare, $n > 0$ și $Q < 0$, (debitul invers apare datorită $H_g > H_p$

(înlățime de pompare);

- regim de turbinare ($n < 0$; $Q < 0$), pompa primește turație inversă datorită curentului de lichid invers și lucrează ca o turbină. În regim de turbinare turația poate degrada pompa. Din acest considerent conducta de refulare se echipează cu un clapet de reținere în apropierea pompei.

O problemă importantă care trebuie rezolvată la calculul loviturii de berbec în instalații de pompare este construirea curbelor caracteristice interne ale pompei la diferite momente care, apoi, se intersectează cu caracteristicile undelor directe, inverse și cu caracteristica conductei. Calculele se pot efectua dacă se cunoaște topograma pompei, $H = H(Q, n, \eta)$, pentru cele trei regimuri de funcționare sau numai în regim de pompare, dacă pompa este protejată cu clapet de reținere.

Mișcarea părții rotative a agregatului de pompare este dată de ecuația diferențială

$$I \frac{d\omega}{dt} + \frac{\gamma Q H}{\eta \omega} = 0 \quad (10.62)$$

în care: $I = m \cdot \frac{D_e^2}{4}$ este momentul de inerție al subansamblelor rotative;

w – masa subansamblelor în rotație; D_e -diametrul echivalent al părții rotative

(GD^2 -este indicat în cataloagele pompelor; $\omega = \frac{\pi n}{30}$ - viteza unghiulară;

n - turația; η - randamentul; Q - debitul; H - sarcina de pompare și γ - greutatea specifică a lichidului pompat.

Ecuatia (10.62) în diferențe finite este

$$n_i - n_0 = -\frac{450\gamma}{\pi I} \left(\frac{Q_0 H_0}{n_0 \eta_0} + \frac{Q_i H_i}{n_i \eta_i} \right) \Delta t \quad (10.63)$$

sau

$$n_i^2 + \frac{n_0^2}{k\Delta t} n_i + n_0^2 - \frac{n_0^3}{k\Delta t} = 0 \quad (10.64)$$

cu

$$k = \frac{1800\gamma g Q_0 H_0}{\pi^2 G D_e^2 n_0 \eta} \quad (10.65)$$

S-a admis în primă aproximație $\eta_0 = \eta_i = \eta$. Prin calcule de aproximații succesive, utilizând ecuațiile (10.64), (10.65) și (10.51) se construiește curba de oprire a pompei (fig. 10.21), luând pas pentru Δt adecvat.

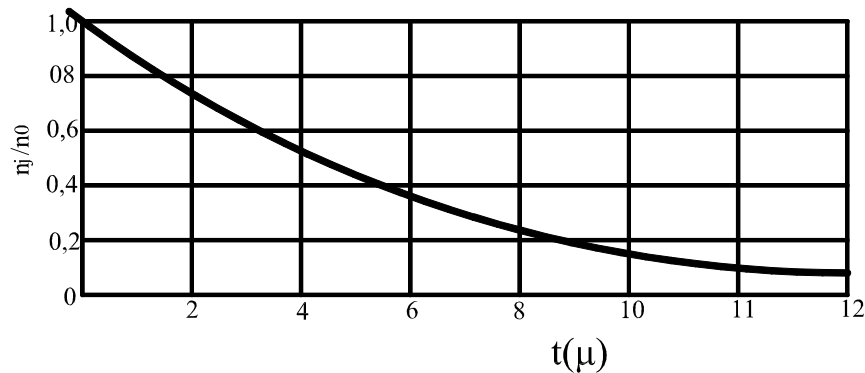


Fig. 10.21. Curba de oprire a pompei

Calcululele de aproximații succesive sunt necesare pentru corectarea randamentului și, implicit, n_i .

După construirea curbei de oprire se alege perioada de timp (unitatea) de calcul, de obicei $\mu = \tau / 2$ sau τ .

Se consideră o instalație de pompare compusă din: bazin de aspirație - conductă de aspirație - pompă-clapet - conductă de refulare - bazin de refulare (fig. 10.22). Se presupune că lovitura de berbec apare datorită opririi accidentale a pompei.

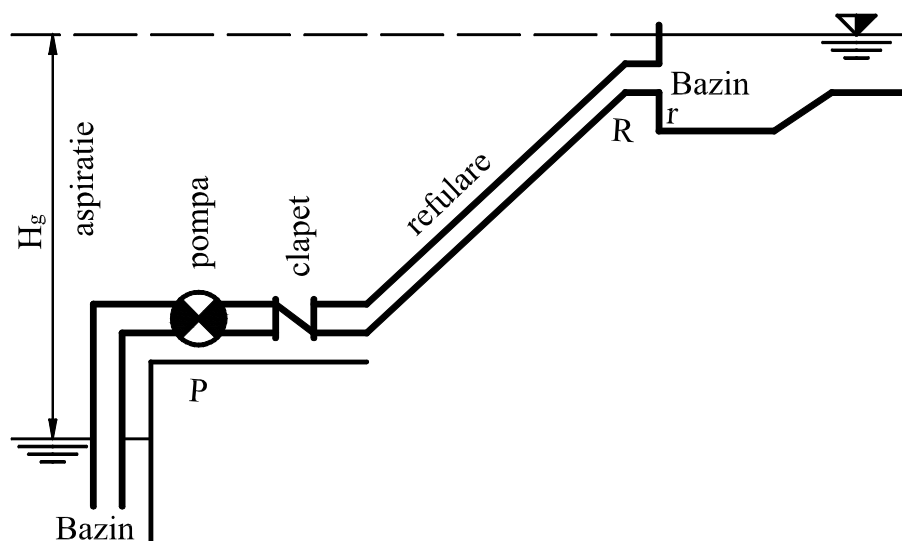


Fig. 10.22. Schema instalației de pompare

În planul figurativ Q, h se trasează caracteristica conductei $H=H_g$ (s-au neglijat pierderile de sarcină), caracteristica pompei la momentul inițial și la momentul μ . La apariția curgerii inverse clapetul se închide având caracteristica $Q=0$. Secțiunea pompei și clapetului, fiind foarte aporpiate, s-a notat cu P , iar secțiunea conductei la rezervor R (fig. 10.23)

Punctele figurative P_0, R_0 și R_1 se găsesc în punctul de funcționare, de coordonate (Q_0, H_g) .

Punctul figurativ P_2 se obține astfel: un observator pleacă cu unda F din R la momentul 1 și ajunge în P în momentul 2. Unda F trece prin punctul R_1 și intersectează caracteristica pompei în momentul 2. Aici unda se reflectă în f și ajunge în R la momentul 3. Deci punctul R_3 este la intersecția undei f , care trece în momentul 2 prin punctul P_2 , cu caracteristica conductei ($h=H_g$). Punctele P_4, P_6, R_5, R_7 se obțin asemănător. Punctul P_8 se obține la intersecția undei F , care trece prin R_7 și caracteristica clapetului închis. Clapetul este închis pentru debite negative prin pompă, însă acesta există în diferite secțiuni ale conductei. După închiderea clapetului caracteristica acestuia se poate considera $Q=0$, deci pentru $t > 8\mu$, punctele figurative $P_{10}, P_{12}, P_{14}...$ se vor găsi pe această caracteristică. Punctele intermediare $P_1, P_3, P_5, R_2, R_4, R_6$ se determină în mod analog, fenomenul fiind urmărit de un observator care pleacă din R momentul $t=0$, deci din R_0 și ajunge la pompă în momentul 1. Astfel se poate trasa variația presiunii mai precis (prin mai multe puncte). Presiunea extremă de fapt corespunde unui moment și unei unde care întâlnește caracteristica pompei pe

caracteristica clapetului. Acest moment se determină prin trasarea caracteristicii pompei pentru intervale mai mici de timp în preajma închiderii clapetului, între momentele 6 și 7 conform fig. 10.23.

Fiindcă nu s-a ținut seama de pierderile de sarcină, oscilațiile de presiune după închiderea clapetului nu se amortizează.

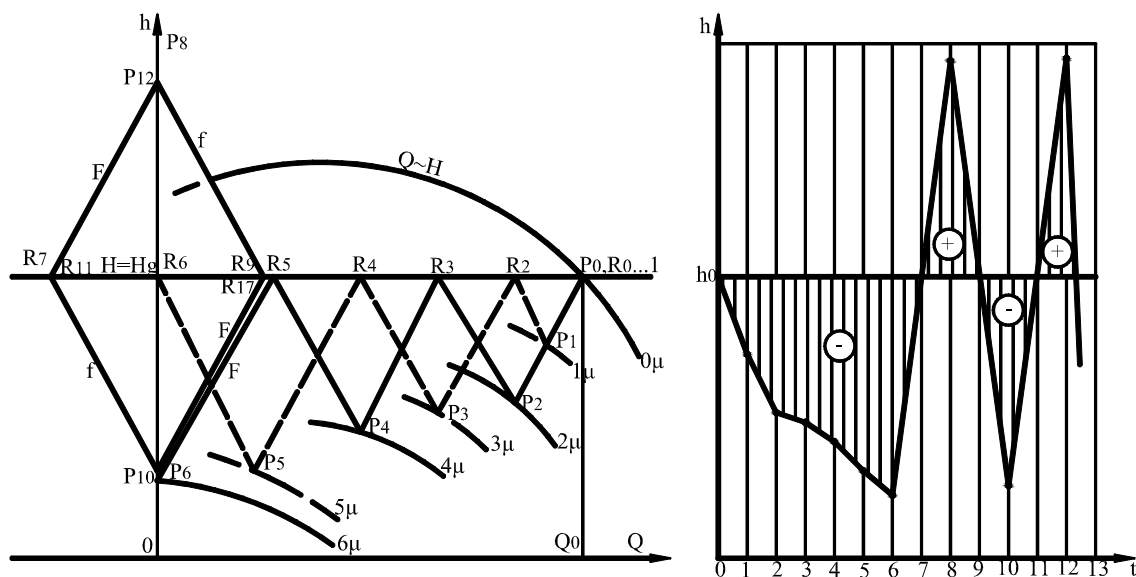


Fig. 10.23. Soluția grafică a loviturii de berbec în conductă simplă cu clapet în instalație de pompare

4. Exemplificări când se consideră pierderile de sarcină

Metoda caracteristicilor permite soluționarea loviturii de berbec și în cazul când se consideră pierderile de sarcină. Pierderile de sarcină liniare se înlocuiesc cu pierderi de sarcină locale echivalente, singularități plasate în anumite secțiuni caracteristice ale conductei. Pierderile de sarcină au efect de amortizare a oscilațiilor de presiune.

Fie AB un tronson de conductă în lungul căreia se propagă lovitură de berbec. În secțiunile A și B se instalează fictiv două singularități. Se notează cu A și a , respectiv B și b secțiunile de pe o parte și alta a singularităților (fig. 10.24).

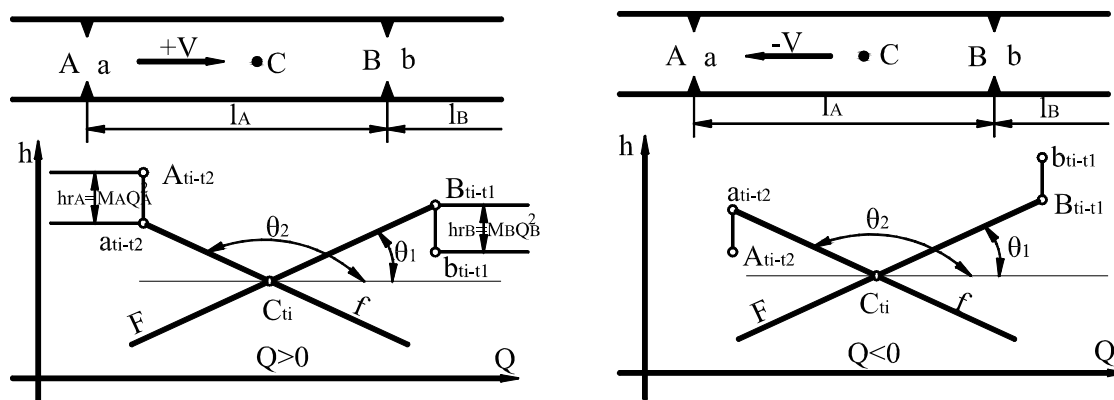


Fig. 10.24. Schema de considerare a pierderilor de sarcină prin singularități fictive la calculul loviturii de berbec

Pentru secțiunea C , intermediară secțiunilor " a " și B , timpul de parcurs de către undă a distanței aC este t_2 , iar a distanței BC , t_1 , punctul figurativ C_i în planul $Q-h$ se află la intersecția caracteristicii F - care trece prin punctul figurativ B_{ti-t1} - și a caracteristicii f - care trece prin punctul a_{ti-t2} . Secțiunea A și a fiind foarte aproape, unda de presiune se va găsi în același moment în ambele secțiuni A și a , iar debitul asociat undei are aceeași valoare în ambele secțiuni. Presiunea în cele două secțiuni diferă prin $hr_A = M_A \cdot Q_A^2$, unde M_A este modulul de rezistență echivalent al singularității din A cu modulul de rezistență al tronsonului de conductă de lungime l_A . Astfel, punctele figurative A_{ti-t2} și a_{ti-t2} sunt situate pe aceeași verticală, la distanța hr_A . Poziția relativă a punctelor A_{ti-t2} și a_{ti-t2} depinde de direcția de parcurs a conductei de către undă. În mod analog se poate arăta situația singularității din B .

a. Lovitura de berbec în conductă simplă gravitațională

Se consideră o conductă alimentată gravitațional, prevăzută cu un robinet în capătul său aval. Pierderile de sarcină distribuite se înlocuiesc cu o pierdere fictivă localizată între secțiunile r , R (fig. 10.25). Se trasează în planul Q, h caracteristica conductei cu considerarea pierderilor atât pentru debite pozitive cât și negative ținând seama de (10.47). Ca și în exemplul 3a se disting două situații în funcție de T_p și τ .

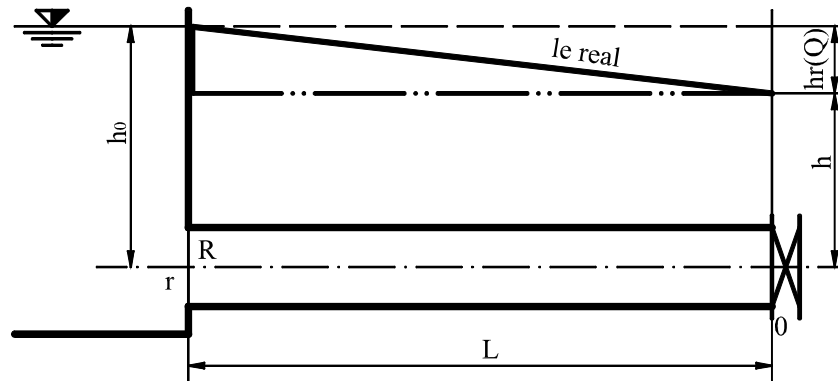
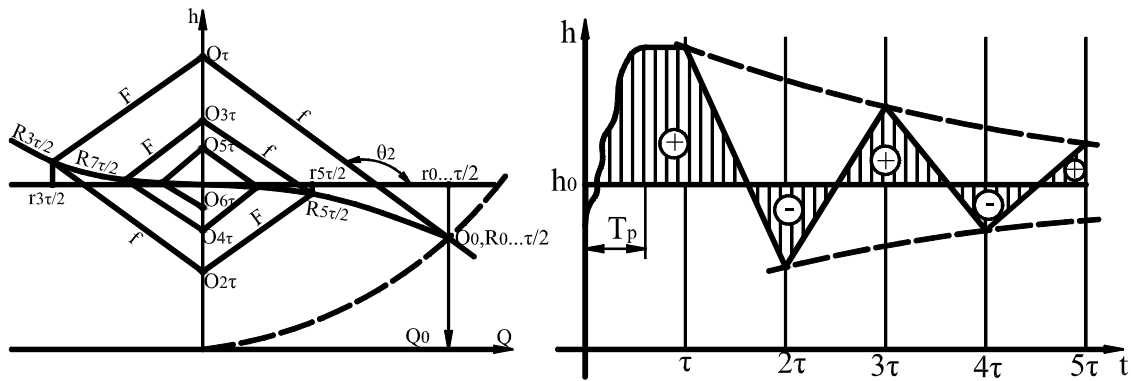


Fig. 10.25. Schema conductei gravitaționale

a1) Cazul $T_p < \tau$. Se trasează caracteristica robinetului corespunzătoare situației mișcării permanente, înainte de începerea perturbării. Intersecția caracteristicii conductei cu a robinetului este punctul de funcționare $(Q, h)_0$. Pentru $T_p < \tau$ prima undă inversă care sosește la robinet găsește pe acesta închis ($Q=0$), (fig. 10.26).

Fig. 10.26. Soluția grafică a loviturii de berbec în conductă gravitațională cu robinet, cu considerarea pierderilor de sarcină, $T_p < \tau$

Punctul figurativ $r_{0... \tau/2}$ se găsește pe caracteristica $h=h_0$, pe verticala lui $R_{0... \tau/2}$, deasupra acestuia cu $hr(Q_0)$. Pentru a determina punctul figurativ O_τ un observator urmărește unda f , care pleacă din R la momentul $\tau/2$ și ajunge în O la momentul τ și găsește robinetul închis. Unda f trece prin $R_{\tau/2}$, are coeficientul unghiular $-m$ ($\theta_2 = \arctg(-m)$) și intersectează caracteristica robinetului închis ($Q=0$). Unda f la robinet închis se reflectă în F și ajunge la momentul $3\tau/2$ în

secțiunea R . Intersecția lui F , care trece prin O_τ , cu caracteristica conductei $h = h_0 \pm hr(Q)$ este punctul $R_{3\tau/2}$. Debitul este negativ, deci $r_{3\tau/2}$ se găsește sub $R_{3\tau/2}$, pe caracteristica $h = h_0$, pe aceeași verticală. Găsirea punctelor figurative $O_{2\tau}, O_{4\tau}, O_{6\tau} \dots R_{5\tau/2}, R_{7\tau/2}, \dots, r_{5\tau/2}, r_{7\tau/2} \dots$ are loc după raționament asemănător. Construirea graficului variației presiunii în timp este asemănător cu cazurile prezentate anterior, observându-se că oscilațiile de presiune se amortizează în timp în jurul valorii h_0 . Presiunea maximă în O se obține în momentul $t = T_p$ apoi se menține până în momentul τ , corespunzător sosirii primei unde inverse. Creșterea presiunii în O în perioada de închidere urmărește legea de închidere a robinetului. În soluționarea grafică trebuie acordată atenție trasării direcțiilor dreptelor undelor, unghiurile θ_1 și θ_2 se trasează prin semnificația lor trigonometrică (ex. prin $\text{tg}\theta$).

a2) Cazul $T_p > \tau$. Ca și în cazul 3.a2, undele inverse găsesc robinetul în procesul de închidere. Se consideră în exemplu că $T_p = 3\tau$, iar ca timp de calcul se ia τ . După calculul lui c și τ se construiește în planul Q, h caracteristica conductei $h = h_0 \pm hr(Q)$, atât pentru debite pozitive cât și negative, apoi caracteristicile robinetului (fig. 10.27).

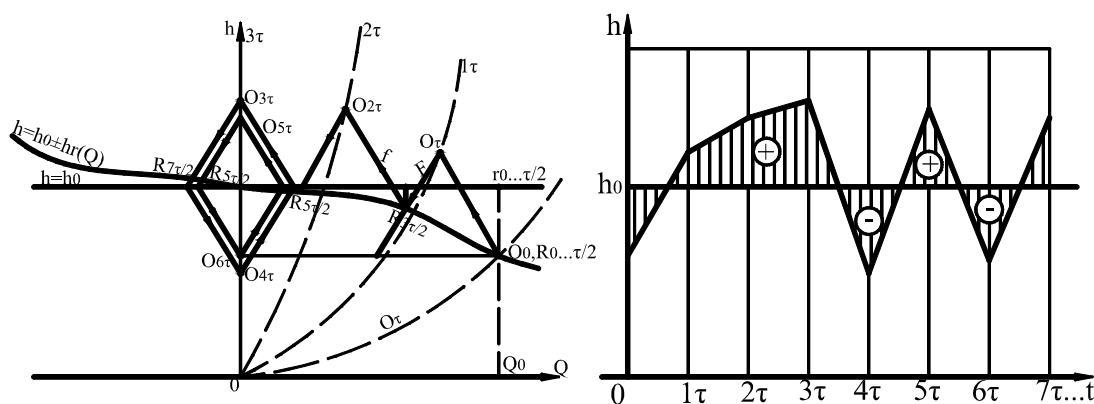


Fig. 10.27. Soluția grafică a loviturii de berbec în conductă simplă gravitațională cu considerarea pierderilor de sarcină, $T_p = 3\tau$

Punctul figurativ O_τ se obține urmărind o undă inversă, f , care pleacă din R în momentul $\tau/2$ și ajunge în O la momentul τ . Caracteristica f trece prin punctul $R_{\tau/2}$, care coincide cu punctul de funcționare inițial și intersectează caracteristica robinetului la momentul τ . Punctul de intersecție este O_τ . Aici unda f se reflectă în F , care ajunge în R la momentul $3\tau/2$, obținând la intersecția caracteristicii F cu

caracteristica conductei punctul $R_{3\tau/2}$. Celelalte puncte O_i , R_i se obțin după același raționament. Punctele r_i se găsesc pe caracteristica $h=h_0$ pe aceeași verticală cu R_i . Presiunile extreme la robinet la $T_p > \tau$ sunt mai puțin periculoase decât pentru $T_p < \tau$. Cu cât robinetul se închide mai lent ecartul presiunilor extreme este mai mic. Datorită pierderilor de sarcină oscilațiile de presiune se amortizează în timp.

b. Lovitură de berbec în instalația bazin aspirație – pompă – clapet – conductă - bazin de refulare, cu considerarea pierderilor de sarcină (fig. 10.28)

Pierderile de sarcină distribuite se înlocuiesc ca efect cu o pierdere locală fictivă, produsă de o singularitate în secțiunea R .

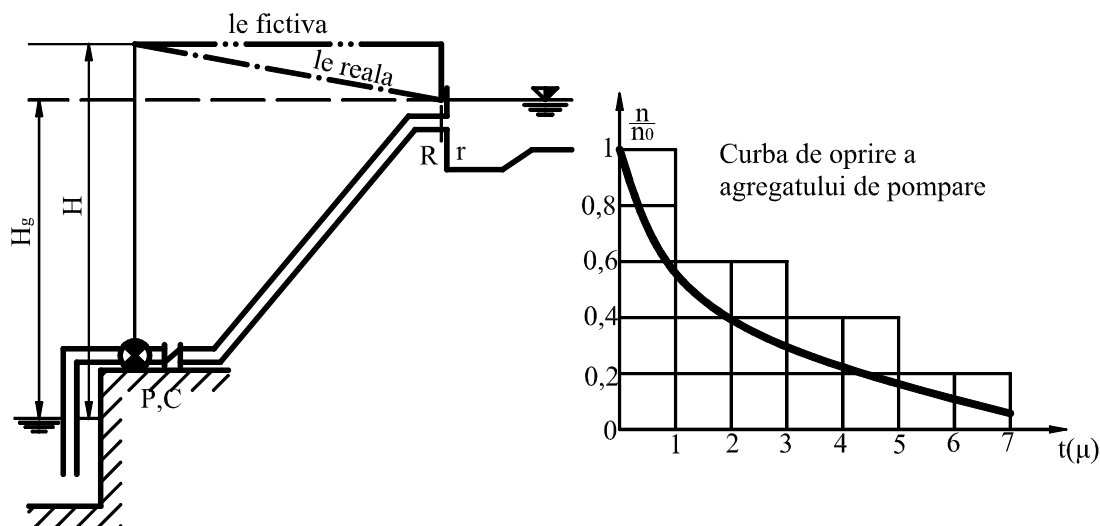


Fig. 10.28. Schema instalației de pompare și de înlocuire a pierderilor de sarcină distribuite cu cele locale fictive

Se presupune că regimul de pompare se menține până la $t = 3\tau = 6\mu$; moment care corespunde închiderii clapetului. Se construiesc în planul $Q \sim h$ caracteristicile conductei, $H = H_g + hr(Q)$ și pompei $Q \sim H$ la timpii de calcul $\mu = \tau / 2$. Punctul de funcționare corespunde intersecției caracteristicii conductei cu caracteristica pompei la turația n_0 - punctul figurativ (Q_0, H_0) - care este specifică secțiunii P în momentul $t=0$ și secțiunii R în perioada $t = 0 \dots \mu$ (fig. 10.29). Punctul figurativ $P_{2\mu}$ este la intersecția caracteristicii undei F , care pleacă de la

rezervor în momentul μ , (pct. R_μ), cu caracteristica pompei la momentul 2μ . Aici unda se reflectă în f și ajunge la R în momentul 3μ (pct. $R_{3\mu}$). Celelalte puncte figurative se obțin în mod asemănător. În momentul 6μ caracteristica pompei, clapetului închis și unde F se întâlnesc în $Q=0$, celelalte oscilații întâlnind caracteristica clapetului închis pentru curgerea inversă. Punctele figurative r_i se găsesc pe verticala punctelor R_i , la intersecția cu $H=H_g$. Oscilațiile de presiune se amortizează în timp datorită frecărilor. În caz mai general, momentul apariției debitului invers nu coincide cu un număr întreg de μ . În acest caz se caută un moment intermediar de urmărire a unde între $(-\mu, \mu)$, care conduce la întâlnirea caracteristicii unde F cu caracteristica pompei pe caracteristica clapetului închis. Acest punct reprezintă extrema minimă a presiunii în P la care corespunde, cu un decalaj de timp 2μ , presiunea maximă.

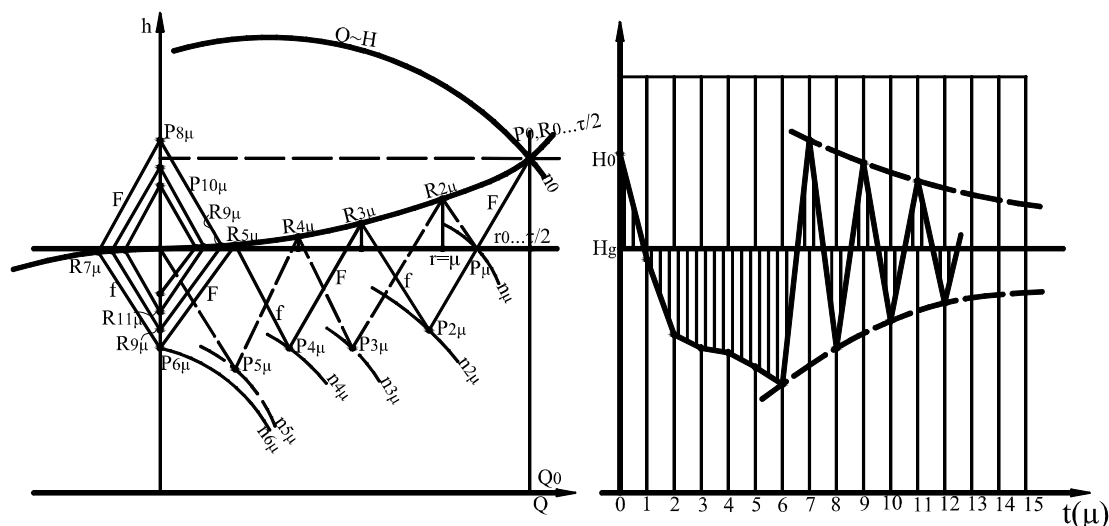


Fig. 10.29. Soluția grafică a loviturii de berbec în conducta instalației de pompare cu clapet de reținere și considerarea pierderilor de sarcină

5. Lovitură de berbec în instalație de pompare când apare cavitatea

Dacă inerția părții rotative este mică, oprirea pompei (aparitia debitului invers) are loc în timp scurt, este posibil ca în conductă presiunile minime să ajungă la presiunea de vaporizare și, implicit, să apară fenomenul de cavitație. Într-o asemenea situație se admite ipoteza că presiunea de vaporizare apare pe întreaga secțiune a conductei (în realitate ea apare întâi la generatoarea superioară a conductei) și că lungimea coloanei de lichid rămâne neschimbată. În calcule intervine **caracteristica presiunii de vaporizare**,

$$h_v = \frac{p_v}{\gamma} = \text{const.} \quad (10.66)$$

în secțiunea unde apare cavitația și ecuația de continuitate,

$$\int_{t_1}^{t_2} \rho Q dt = 0 \quad (10.67)$$

în spațiul unde are loc cavitația, t_1 fiind momentul apariției cavitației, iar t_2 momentul dispariției sale. Ecuația (10.66) arată că în secțiunea unde apare cavitația presiunea rămâne constantă la valoarea γh_v pe întreaga durată a cavitației. Ecuația (10.67) se interpretează astfel (fig. 10.29').

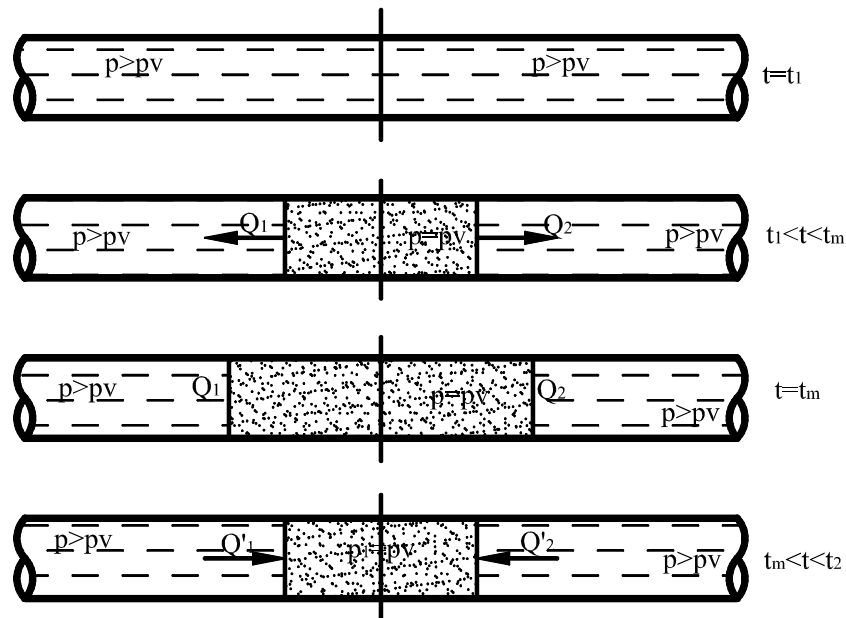


Fig. 10.29'. Interpretarea fenomenului de cavitație în procesul loviturii de berbec.

Fie t_m momentul în care spațiul ocupat de fenomenul de cavitație este maxim. La momente $t_1 < t < t_m$, cele două coloane de lichid după rupere se îndepărtează și volumul de lichid care eliberează spațiul, unde $h = h_v$ în timpul dt , este:

$$(Q_1 + Q_2) dt$$

La momente $t_m < t < t_2$ cele două coloane de lichid se apropie și volumul de lichid care intră în spațiul unde $h = h_v$, în timpul dt , este

$$(Q'_1 + Q'_2) dt$$

Considerând $\rho = \text{const.}$ pentru $p \geq p_v$ rezultă

$$\int_{t_1}^{t_m} \rho(Q_1 + Q_2) dt + \int_{t_m}^{t_2} \rho(Q'_1 + Q'_2) dt = \int_{t_1}^{t_2} \rho Q dt = 0 \quad (10.68)$$

Dacă μ este unitatea de timp de calcul (10.67) se mai poate scrie:

$$\sum_{i=1}^k Q_i \mu = 0 \text{ sau } \sum_{i=1}^k Q_i = 0 \quad (10.69)$$

unde $i=1$ este momentul apariției cavitației, iar $i=k$ - momentul dispariției acesteia.

Pentru exemplificare se consideră instalația din fig. 10.28, cu momentul apariției regimului de frânare (curgere inversă) în intervalul $t \in [0, 2\mu)$, deci unda care pleacă de la $R\mu$ nu întâlnește caracteristica pompei, iar caracteristica clapetului ar intersecta într-un punct de coordonate $Q=0$; $h < h_v$, deci apare cavitația și unda întâlnește de fapt caracteristica de cavitație $h=h_v=\text{const.}$ Unda se reflectă în f și ajunge în R , unde iar se reflectă în F , întâlnind caracteristica $h=h_v$. Acest fenomen se repetă până la momentul când dispare cavitația și conform (10.69) are loc la debite simetrice față de axa $Q=0$ (fig. 10.30).

Punctele P_2 și P_{10} sunt simetrice față de axa Q , punctul P_{10} poate rezulta și cu ajutorul punctului $V_{2,10}$, care corespunde intersecției unde F cu $Q=0$, sub valoarea presiunii de vaporizare. Celelalte puncte se găsesc cu raționament asemănător. Pe epura presiunii se constată că pe perioada $(2 \dots 10)\mu$, presiunea în punctul P se menține la h_v , apoi urmează un salt la P_{12} , apărând iarăși cavitația în perioada $(14 \dots 18)\mu$ etc. Oscilațiile de presiune se amortizează datorită frecărilor. Când presiunea la P nu ajunge la cea de vaporizare unda întâlnește caracteristica clapetului închis. Ruperea coloanei la cavitație limitează presiunile minime la valoarea presiunii de vaporizare, iar refacerea coloanei de lichid implică apariția unor suprapresiuni foarte mari.

Presiunile vacuumetrice ce pot apare la lovitura de berbec sunt deosebit de periculoase în conducte din oțel, de diametru mare și perete subțire. Sub influența presiunii vacuumetrice aceste conducte se pot turti prin depășirea rezistenței conductei la moment încovoietor. De obicei valoarea presiunilor minime se limitează prin dispozitive de protecție.

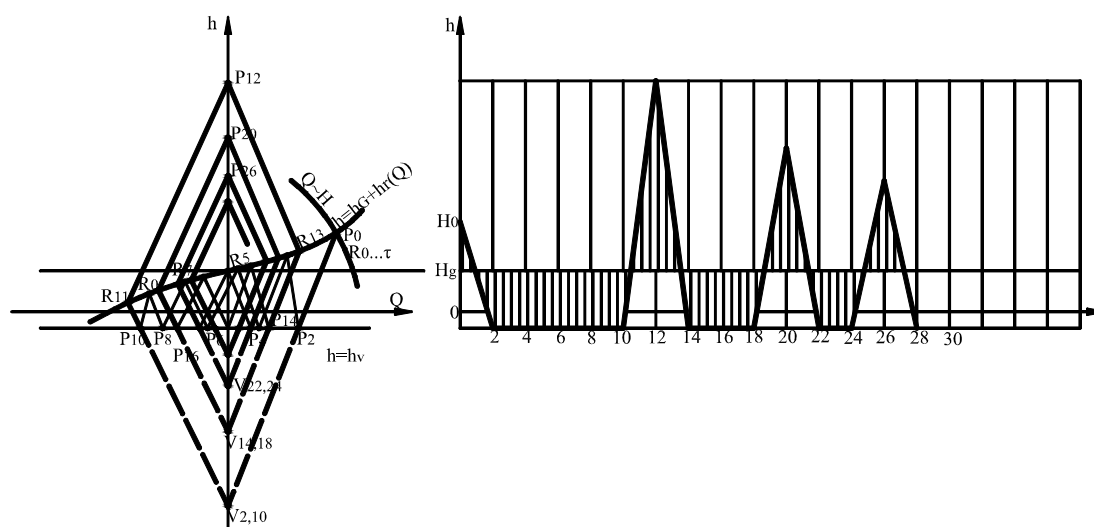


Fig. 10.30. Lovitură de berbec cu apariția cavitației în instalație de pompare

Protecția conductelor împotriva presiunilor vacuometrice care apar la lovitură de berbec se realizează cu rezervoare deschise sau cu pernă de aer, amplasate în secțiunile cele mai nefavorabile.

Practic se transformă mișcarea rapid variată în mișcare lent variată, cu amplitudine mai mică a ecartului de presiune.

a) La lovitură de berbec în instalație de pompare între bazine cu nivel liber conducta este protejată cu un rezervor cu nivel liber (fig. 10.31).

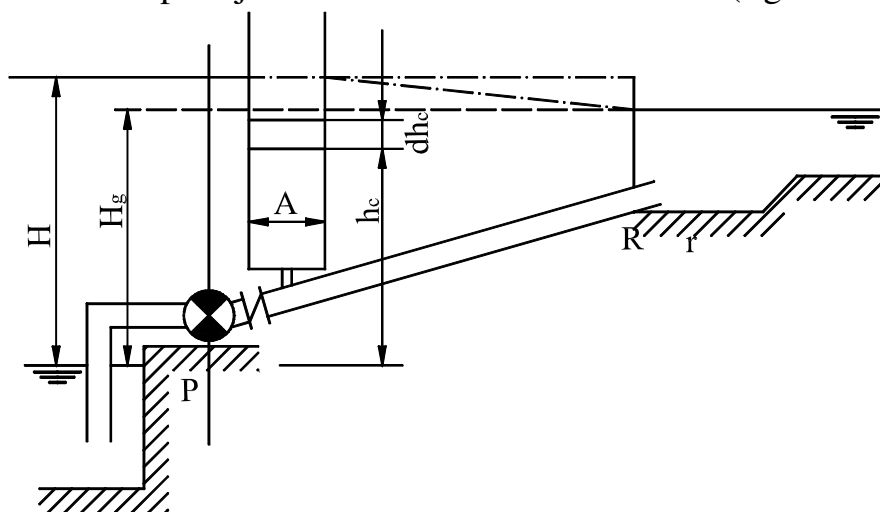


Fig. 10.31. Instalație de pompare cu rezervor cu nivel liber (turn de apă).

¹Bartha I., Niță M. Popa M. - Unele contribuții privind influența deformațiilor inițiale ale conductelor circulare de mare diametru asupra comportării lor la presiuni vacuometrice - Îmb.funziare și Construc. Rurale, nr.1. 1993.

La soluționarea problemei prin metoda grafică a caracteristicilor se intersectează ecuația undelor (10.56), (10.61) cu caracteristica conductei $H = H \pm hr(Q)$, caracteristica pompei $Q-h$, clapetului (pentru curgere inversă $Q=0$) și a rezervorului cu nivel liber

$$Q_c dt = A_c dh_c \quad (10.70)$$

unde Q_c este debitul derivat spre sau dinspre rezervor, A_c - secțiunea orizontală a rezervorului, dh_c - variația de nivel în rezervor, dt - element de timp. Se acceptă unitatea de timp de calcul $dt = \mu = \frac{\tau}{2}$, respectiv $dh_c = \Delta h_c$, iar Q_c se consideră la sfârșitul intervalului de timp μ . Pentru momentul i ecuația devine

$$\Delta h_{ci} = \frac{\mu Q_{ci}}{A_c} \quad (10.71)$$

La soluționare se mai consideră continuitatea în ramificația spre rezervor în momentul i

$$Q_{pi} = Q_{ci} + Q_i \quad (10.72)$$

cu Q_{pi} - debitul pompei; Q_{ci} - debit derivat în sau din rezervor, Q_i - debitul conductei. Soluționarea grafică este destul de anevoiasă și necesită acuratețe deosebită.

c) Efect de atenuare asemănător are și rezervorul cu pernă de aer (fig. 10.32).

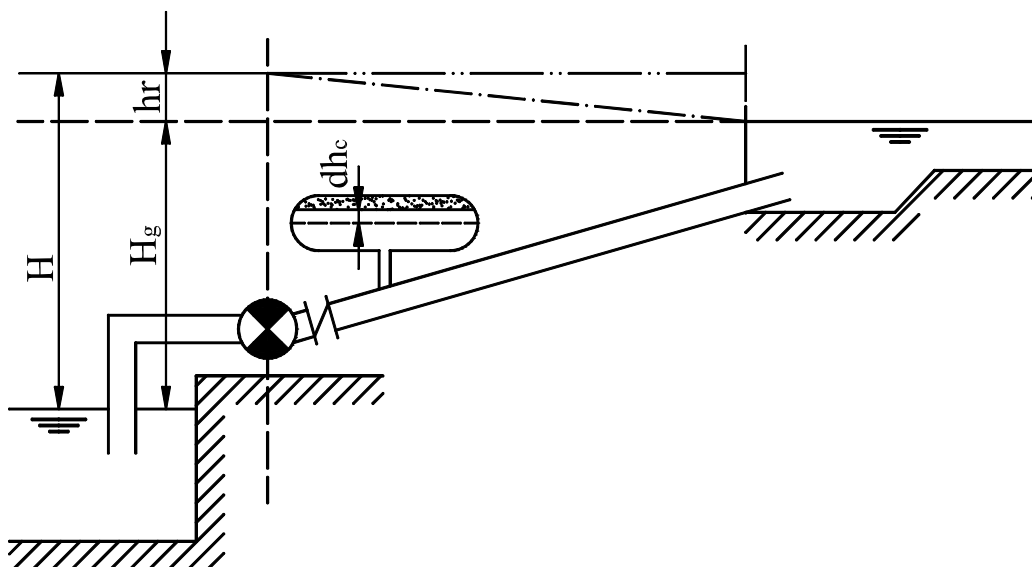


Fig. 10.32. Instalație de pompare protejată de rezervor cu pernă de aer

Soluția loviturii de berbec este asemănătoare cazului precedent, modificându-se caracteristica rezervorului de protecție, care este sub presiune. În locul ecuației (10.70) se scrie relația lui Boyle-Mariotte

$$(h_p + h_0)W_0 = (h_c + h_0)W \quad (10.73)$$

care după diferențiere devine:

$$dh_c = \frac{(h_c + h_0)^2}{W_0(h_p + h_0)} Q_c dt \quad (10.74)$$

S-au notat: $h_0 = \frac{p_0}{\gamma}$ presiune atmosferică (mCA); h_p - înălțime de pompare în momentul inițial; W - volumul de aer în rezervor la un moment oarecare, W_0 - volumul de aer în momentul inițial. Se știe $dW = Q_c dt$. Se acceptă timp de calcul $dt = \mu$, respectiv $Q_c = Q_{ci}$ și se notează

$$\varphi(h_{ci}) = \frac{W_0(h_p + h_0)}{(h_{ci} + h_0)^2} \quad (10.75)$$

Astfel (10.74) devine

$$\Delta h_{ci} = \frac{\mu}{\varphi_i} Q_{ci} \quad (10.76)$$

care este caracteristica rezervorului cu pernă de aer, analoagă cu (10.71). Soluția este asemănătoare cazului precedent. Pentru rigurozitate se pot considera și pierderile de sarcină la intrarea și ieșirea din și în rezervor cu pernă de aer (sau cu nivel liber).

10.2.7.2. Metoda numerică a caracteristicilor

Dacă metodele grafice permit calculul loviturii de berbec în instalații hidraulice relativ simple, dezvoltarea calculatoarelor permite rezolvarea practic a tuturor problemelor de lovitură de berbec pentru care s-a elaborat algoritmi; pot fi soluționate probleme atât pe conducte monofilare cât și rețele.

Se utilizează pe scară largă metoda caracteristicilor, dar și serii de funcții analitice.

Metoda caracteristicilor presupune rezolvarea pe calculator, după un algoritm adecvat, a unor sisteme de ecuații în care intră ecuațiile dreptelor caracteristice, ecuația de continuitate, ecuația caracteristică a conductei cu pierderi de sarcină, curbele caracteristice ale pompelor și ale dispozitivelor de pe conducte (ecuațiile mișcării în condiții de unicitate).

Metoda caracteristicilor se aplică ori cu concentrarea pierderilor de sarcină la singularități fictive, ori uniform distribuite. Se prezintă algoritmul de calcul pentru situația când pierderile de sarcină sunt concentrate la singularități fictive.

În acest caz calculele analitice repetă calculele grafice anterior prezentate. Conducta se împarte în tronsoane de calcul, se introduc singularități fictive în locul pierderilor liniare, se stabilește unitatea de timp de calcul corespunzătoare timpului de propagare a undei de presiune pe tronsonul cel mai mic $\mu = \tau / 2$. Se scriu ecuațiile mișcării pe fiecare tronson de calcul și condițiile de racordare ale acestora în debite și presiuni (se ține seama de singularitățile fictive considerate). În secțiunile unde sunt dispozitive se introduc ecuațiile lor caracteristice.

Algoritmul se prezintă prin câteva exemple.

1) Fie o singularitate fictivă între două tronsoane cu același timp de propagare a undei de presiune (fig. 10.33).

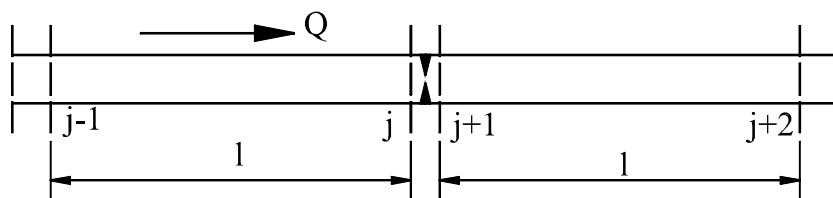


Fig. 10.33. Schema de calcul pe tronsoane simple

Se afectează mărimile hidraulice cu doi indici, primul indicând secțiunea de calcul, al doilea timpul la care se referă. Mărimile geometrice care nu se modifică în timp se afectează cu un singur indice (indicatorul spațiului), care indică tronsonul la dreapta secțiunii de calcul respective.

La timpul i se cunosc toate valorile mărimilor hidraulice variabile. La acest moment parametrii Q , h în secțiunile j și $j+1$ se determină din ecuațiile:

$$h_{j,(i+1)}^* - h_{(j-1),i} = -m_{(j-1)} \left[Q_{j,(i+1)}^* - Q_{(j-1),i} \right] \quad (10.77)$$

$$h_{(j+1),(i+1)}^* - h_{(j+2),i}^* = -m_{(j+1)} \left[Q_{(j+1),(i+1)}^* - Q_{(j+2),i} \right] \quad (10.78)$$

$$h_{j,(i+1)}^* - h_{(j+1),(i+1)}^* = -M_j Q_{j,(i+1)}^* \quad (10.79)$$

$$Q_{j,(i+1)}^* = Q_{(j+1),(i+1)}^* \quad (10.80)$$

Cu asterisc s-au marcat necunoscutele.

Prima ecuație este caracteristică unei f , care pleacă din secțiunea $j-1$ la momentul i și ajunge în secțiunea j la momentul $i+1$. A doua ecuație este caracteristica unei F , care pleacă din secțiunea $j+2$ la momentul i și ajunge în secțiunea $j+1$ la momentul $i+1$. A treia ecuație este pierderea de sarcină la singularitatea fictivă, iar a patra ecuație exprimă continuitatea. Cele patru ecuații conțin patru necunoscute unic determinate.

2) Se consideră secțiunea de legătură a unui rezervor de echilibru cu nivel liber cu conductă de refulare (fig. 10.34).

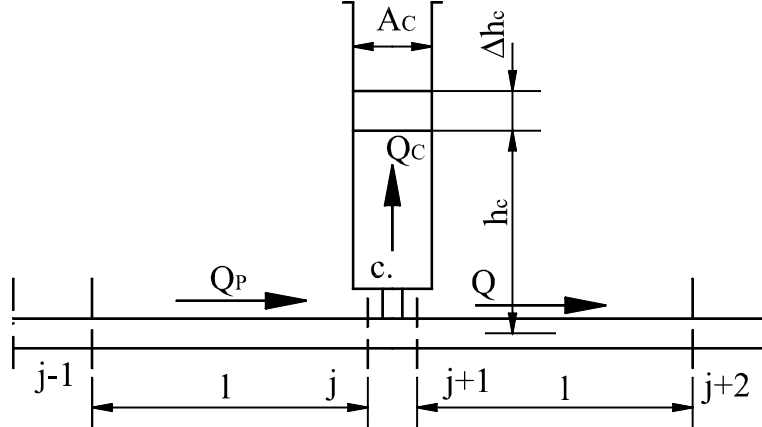


Fig. 10.34. Schema de calcul a racordului rezervorului de echilibru la conductă

Se pot scrie următoarele ecuații:

- caracteristica rezervorului de echilibru

$$h_{c,i} - h_{c,(i+1)}^* = -\frac{\mu}{2A_c} \left[Q_{c,i} - Q_{c,(i+1)}^* \right] \quad (10.81)$$

- caracteristica undei f

$$h_{j,(i+1)}^* - h_{(j-1),i} = -m_{(j-1)} \left[Q_{j,(i+1)}^* - Q_{(j-1),i} \right] \quad (10.82)$$

- caracteristica undei F

$$h_{(j+1),(i+1)}^* - h_{(j+2),i} = m_{(j+1)} \left[Q_{(j+1),(i+1)}^* - Q_{(j+2),i} \right] \quad (10.83)$$

- legătura de presiuni între secțiunile j și $j+1$

$$h_{j,(i+1)}^* = h_{(j+1),(i+1)}^* \quad (10.84)$$

- caracteristica intrării în rezervorul de echilibru

$$h_{c,(i+1)}^* - h_{j,(i+1)}^* = M_c Q_{c,(i+1)}^* \quad (10.85)$$

- ecuația de continuitate

$$Q_{j,(i+1)}^* = Q_{(j+1),(i+1)}^* + Q_{c,(i+1)}^* \quad (10.86)$$

În situația când în loc de rezervor de echilibru cu nivel liber se folosește rezervor cu pernă de aer se înlocuiește A_c cu $\varphi(h_{c,i})$, dată de relația (10.75), corespunzător momentului i .

3) Se consideră instalația de pompare din fig. 10.35. Se împarte conducta în $N/2$ tronsoane de calcul egale. Rezervorul cu pernă de aer se presupune în nodul $k, k+1$ (punct nefavorabil din punct de vedere al presiunilor minime).

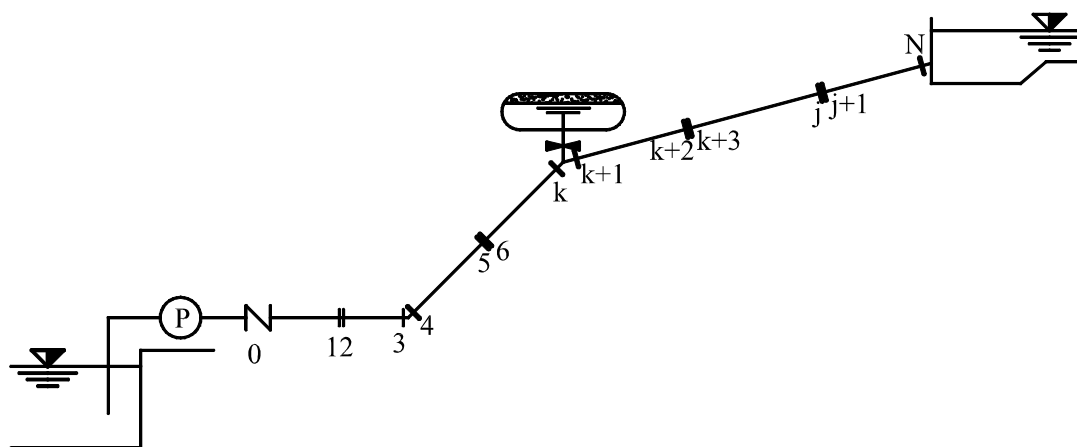


Fig. 10.35. Schema instalației de pompare considerate

La momentul i se cunosc toate caracteristicile mișcării. Se scriu ecuațiile pentru stabilirea parametrilor în momentul $i+1$:

- în secțiunea pompei unda F :

$$h_{0,(i+1)} - h_{1,i} = m_0 [Q_{0,(i+1)} - Q_{1,i}] \quad (10.87)$$

și caracteristica pompei

$$h_{0,(i+1)} = a_{0,(i+1)} + b_{0,(i+1)} Q_{0,(i+1)} + c_{0,(i+1)} Q_{0,(i+1)}^2 \quad (10.88)$$

pentru $Q_{0,(i+1)} > 0$, unde $(a, b, c)_{0,(i+1)}$ sunt coeficienți care depind de turația $n_{(i+1)}$, la momentul $(i+1)$. S-a descris caracteristica pompei cu un polinom de gradul 2. Pentru

$$Q_{0,(i+1)} = 0 \quad (10.89)$$

se înlocuiește (10.88) cu (10.89), care este caracteristica clapetului închis. Eventual în loc de (10.89) se utilizează o lege de închidere a clapetului sau robinetului cu închidere programată. Pentru tronsoanele $0 < j < k$ și $k+1 < j < N$ sunt valabile ecuațiile (10.77...80). În secțiunea k sunt valabile ecuațiile (10.82...86) cu înlocuirea A_c cu $\varphi(h_{c,i})$ din relația

$$\varphi_{k,i} = \frac{W_0 \left(h_{c,0} + \frac{p_0}{\gamma} \right)}{\left(h_{c,i} + \frac{p_0}{\gamma} \right)^2} \quad (10.90)$$

Se pot considera unul sau mai multe rezervoare de protecție pe traseu, cu nivel liber sau cu pernă de aer. Volumul de apă din rezervorul cu pernă de aer se determină cu relația

$$W_{apa} = \int_0^{t1} Q_c dt = \sum_{i=0}^{i=i_1} Q_{c,i} \Delta t \quad (10.91)$$

unde limita superioară $t_I = i_I$ rezultă din condiția $Q \leq 0$ (rezervorul în prima fază alimentează conducta). Volumul total al rezervorului cu pernă de aer, când nu se admite intrarea aerului în conductă, este:

$$W_{tot} = W_0 + W_{apa} \quad (10.92)$$

Uneori se acceptă și intrarea aerului în conductă, care reduce volumul total al rezervorului. Aerul se deplasează sub formă de pungi și se evacuează la dispozitivele de dezaerisire sau la refulare. Aerul introdus în conductă poate provoca noi lovituri de berbec și din acest considerent rezervorul cu pernă de aer se supradimensionează cu un coeficient de 1,2... 1,3.

10.2.8. Mijloace de protecție ale conductelor împotriva efectelor loviturii de berbec

Ecuațiile diferențiale ale loviturii de berbec fiind analoage ecuației corzilor vibrante, înfășurătoarea presiunilor extreme se poate trasa aproximativ, cunoscând presiunile extreme în punctele de margine R (rezervor) și P (pompă), prin reprezentarea grafică a ecuației presiunilor. Liniile înfășurătoare a presiunilor extreme suprapuse cu profilul longitudinal al conductei (eventual și cu linia piezometrică în regim permanent) permit stabilirea presiunilor extreme-manometrice și vacuometrice - din conductă, respectiv a secțiunilor nefavorabile (fig. 10.36).

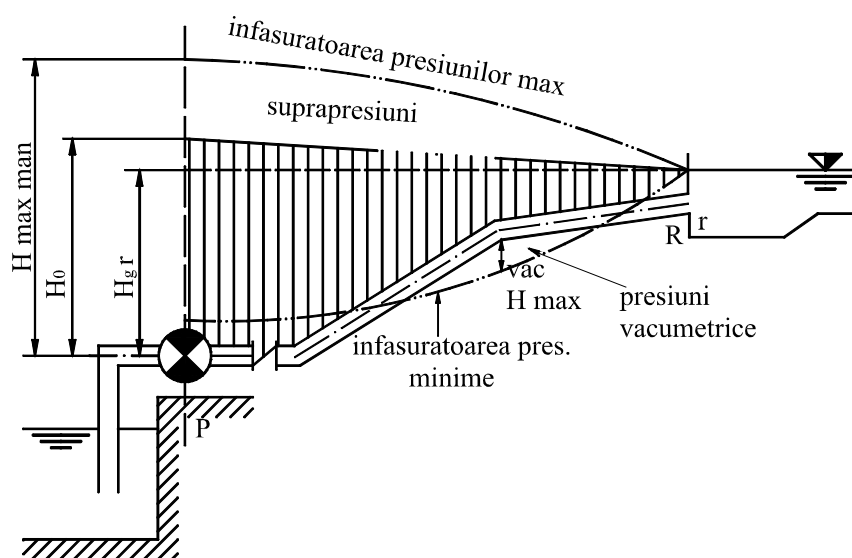


Fig. 10.36. Stabilirea punctelor periculoase

Punctele periculoase pe traseul conductei sunt: secțiunea P pentru suprapresiuni și secțiunea C pentru subpresiuni (vacuumetrice). La presiuni vacuumetrice conductele din oțel cu diametru mare și perete subțire se pot turti prin depășirea rezistenței la încovoiere. La suprapresiune se poate depăși rezistența conductelor.

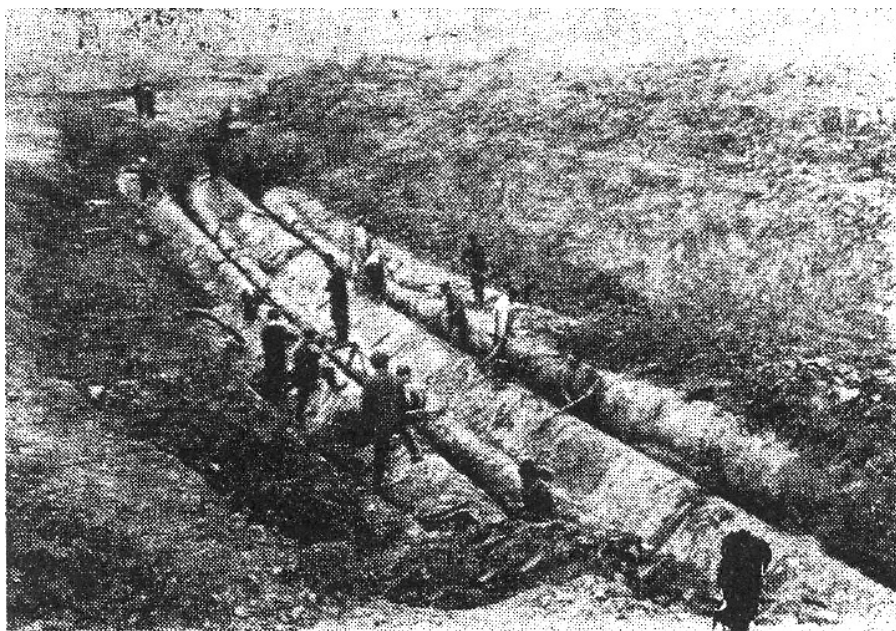


Fig.10.37. Turtirea conductelor la presiuni vacuumetrice

1. Metode și mijloace pentru limitarea subpresiunilor

Metode de limitare a subpresiunilor pot admite ruperea coloanei de lichid - introducând aer în conductă sau la presiunea de vaporizare - sau împiedicarea ruperii coloanei.

a) *împiedicarea ruperii coloanei de lichid*, poate fi realizată prin mai multe metode:

- la instalații hidraulice cu pompare se prelungește timpul de funcționare a agregatului prin sporirea inerției maselor rotative (se mărește GD^2). Este uzual la pompe mici, care se prevăd cu volant;
- alimentarea cu apă a conductei din bazinul de aspirație prin conductă de ocolire (by-pass), prevăzută cu clapet;
- introducerea în conductă a unui debit de apă în punctele de presiune vacuumetrică maximă din rezervoare cu nivel liber sau cu pernă de aer. La legătura acestor rezervoare cu conducta se utilizează uneori rezistențe hidraulice asimetrice, care au rezistență hidraulică mai mică la cedarea apei decât la umplere;

b) *Acceptarea ruperii coloanei de lichid* - dar nu prin cavitație ci înainte de apariția acesteia - prin introducerea de aer în conductă în secțiunile de presiuni vacuometrice maxime, cu dispozitive de aerisire - dezaerisire (în aceleași secțiuni trebuie asigurată și evacuarea ulterioară a aerului).

2. Metode de limitare a suprapresiunilor

Metodele de limitare a suprapresiunilor sunt multiple, dintre care se menționează:

- evacuarea unei cantități de apă din conductă în rezervoare de protecție cu nivel liber sau cu pernă de aer. În acest caz apa evacuată se recuperează ulterior;
- evacuarea unor cantități de apă în atmosferă (fără posibilitate de recuperare) prin dispozitive antișoc (supape cu arc sau greutate calibrate, care se deschid la atingerea unei anumite suprapresiuni);
- limitarea curgerilor inverse pe traseul conductei cu clapete găuriți;
- utilizarea unor membrane calibrate care se autodistrug la depășirea presiunilor, evacuând apa;
- fracționarea suprapresiunilor pe conductă cu clapete de reținere pe traseu;
- utilizarea, în loc de clapete de reținere, a robineților cu închidere programată.

Cea mai eficientă metodă este transformarea mișcării rapid variată în mișcare lent variată, creșterea perioadei oscilațiilor, concomitent cu reducerea amplitudinii lor.

10.2.9. Fenomene asociate loviturii de berbec. Stabilitatea sistemelor hidraulice sub presiune

Sistemele hidraulice sub presiune sunt echipate cu dispozitive de reglare a debitelor, presiunilor, de protecție sau de atenuare a efectelor loviturilor de berbec. Deseori avem de-a face cu rețele de conducte cu ramificații. În astfel de instalații lovitură de berbec constă în suprapunerea undelor de pe linia principală și din ramificații cu undele provocate de organele perturbatoare. Când frecvența oscilațiilor proprii ale sistemului coincide sau este apropiată de frecvența oscilațiilor perturbatoare se pot realiza suprapresiuni foarte mari, apărând fenomenul de instabilitate hidraulică sau rezonanță.

Un sistem hidraulic sub presiune se consideră instabil, dacă oscilațiile de presiune care apar în urma unor perturbații, care intervin în condițiile limită,

se dezvoltă în timp nelimitat, amplitudinea lor crescând la valori nedefinit de mari (fig. 10.38.)

Un sistem hidraulic este stabil dacă perturbațiile intervenite în condițiile limită produc oscilații care se amortizează în timp (fig. 10.38. b).

Oscilațiile de presiune într-un sistem hidraulic se pot descompune în oscilații elementare componente, în armonici simple. În cazul când frecvența factorilor perturbatori este egală sau apropiată de frecvența proprie sistemului - corespunzătoare armonicei principale sau secundare - apare rezonanța, caz particular de instabilitate hidraulică.

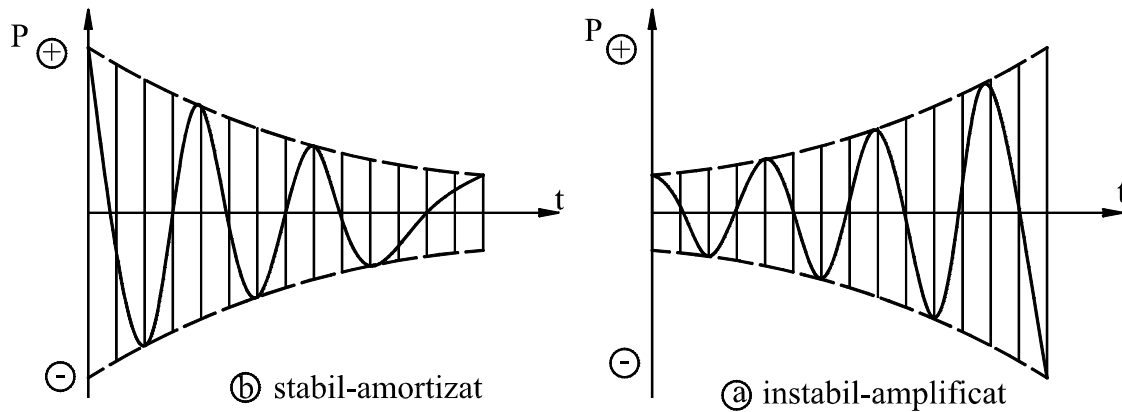


Fig. 10.38. Oscilații de presiune în sisteme hidraulice sub presiune

Rezonanța nu conduce neapărat la creșterea necondiționată a amplitudinii oscilațiilor de presiune, însă poate conduce la valori ale presiunii care depășesc limitele admisibile (din punct de vedere al rezistenței materialului).

Revăzând ecuațiile diferențiale ale loviturii de berbec

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial s^2} \quad (10.21)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \quad (10.22)$$

la care, în cazul coincidenței de sens între axa s și viteza v , se poate scrie

$$-\frac{\partial p}{\partial t} = \rho c \frac{\partial v}{\partial s} \quad (10.93)$$

Folosind analiza operațională, presiunea, respectiv viteza în transformate Laplace, se pot scrie

$$\mathcal{L}(p) = \bar{p} = \int_0^{\infty} p \cdot e^{-rt} dt \quad (10.94)$$

și

$$\mathcal{L}(V) = \bar{v} = \int_0^{\infty} V \cdot e^{-rt} dt \quad (10.95)$$

Unde $\bar{p}$ și $\bar{v}$ sunt imaginea, transformata lui p și v ; $r = \sigma + i\nu$ este o mărime complexă, cu $\sigma, \nu \in R$.

În condițiile inițiale nule, ecuațiile (10.21 și 10.22) în transformate Laplace devin:

$$r^2 \bar{p} = c^2 \frac{d^2 \bar{p}}{ds^2}; \frac{d^2 \bar{p}}{ds^2} - \left(\frac{r}{c}\right)^2 \bar{p} = 0 \quad (10.96)$$

$$r^2 \bar{v} = c^2 \frac{d^2 \bar{v}}{ds^2}; \frac{d^2 \bar{v}}{ds^2} - \left(\frac{r}{c}\right)^2 \bar{v} = 0$$

respectiv

$$-r \bar{p} = c^2 \frac{d\bar{v}}{ds} \quad (10.93')$$

Notând cu $\alpha = r/c$, expresiile gener ale ale soluțiilor lui (10.96) sunt:

$$\begin{cases} \bar{p} = A_1 e^{\alpha s} + A_2 e^{-\alpha s} \\ \bar{v} = B_1 e^{\alpha s} + B_2 e^{-\alpha s} \end{cases} \quad (10.97)$$

Din condițiile (10.93) și (10.93'), rezultă

$$B_1 = -\frac{A_1}{\rho c} \quad \text{și} \quad B_2 = \frac{A_2}{\rho c} \quad (10.98)$$

care A_1, A_2, B_1, B_2 sunt constante complexe.

Soluțiile (10.97) se pot pune sub forma

$$\bar{p} = \frac{A}{r-z}; \quad \bar{v} = \frac{B}{r-z} \quad (10.99)$$

A, B și z fiind constante complexe.

Analiza condițiilor de stabilitate hidraulică se reduce la determinarea valorilor lui z care anulează numitorul expresiilor (10.99).

Transformata Lapalce a imaginii $\bar{p}$ este însăși funcția inițială, care are forma

$$p = Ae^{zt} \quad (10.100)$$

Dacă partea reală a lui z , $Re\ z < 0$, atunci $\lim_{t \rightarrow \infty} p = 0$ și reprezintă un sistem hidraulic stabil. Dacă $Re\ z > 0$, atunci $\lim_{t \rightarrow \infty} p \rightarrow \infty$ și sistemul hidraulic este instabil.

Stabilitatea sistemului hidraulic sub presiune se obține pentru valori ale lui z din semiplanul complex stâng. Cazul $Re\ z=0$ corespunde curbei de indiferență. Pe curba de indiferență oscilațiile sunt întreținute și corespund frecvențelor proprii sistemului hidraulic. Cunoscând frecvența proprie a sistemului hidraulic se cunosc, implicit, și condițiile de rezonanță, care rezultă din soluția ecuației oscilațiilor periodice, de forma

$$p = Ae^{i\nu t} \quad (10.101)$$

Pentru condiția de rezonanță frecvența perturbațiilor trebuie să coincidă sau să fie apropiată frecvenței ν a sistemului. Oscilațiile proprii ale sistemelor hidraulice sub presiune fiind rezultatul suprapunerii unor oscilații simple (armonica de bază și armonici secundare), condiții de rezonanță se pot obține și în cazul când perturbația are frecvența armonice de bază sau a unor armonici secundare principale.

Sisteme hidraulice stabile au frecvența sistemului sau a armonice de bază și a celor secundare principale diferită de frecvența perturbației. Convergența variației de presiune se poate grăbi dacă pe oscilațiile proprii sistemului, de frecvență ν , se suprapune efectul perturbației de aceeași frecvență, dar de sens contrar. Acest procedeu se poate aplica numai în cazurile când există un control riguros al frecvenței și sensului oscilațiilor perturbatoare.

10.3. Mișcare nepermanentă lent variată (Oscilații de masă)

Dacă pe conducta de refulare a unei instalații de pompare se intercalează un rezervor de echilibru cu nivel liber sau cu pernă de aer, mișcarea nepermanentă între acest rezervor și bazin de refulare este oscilatorie sau periodică.

La perturbarea condițiilor la limită (ex. oprirea pompei), masa de apă din rezervorul de echilibru și conducta de refulare, cuprins între rezervor și bazinul de refulare, va avea o mișcare de oscilație dacă rezistențele hidraulice sunt mici sau o mișcare aperiodică - dacă rezistențele hidraulice sunt mari. Pe acest tronson se poate neglija compresibilitatea apei și elasticitatea conductei, fiind valabile ecuațiile mișcării permanente lent variate.

Pe tronsonul dintre rezervorul de echilibru și pompe mișcarea este rapid variată (lovitură de berbec).

Fenomenul este asemănător cu mișcarea oscilatorie din castelele de echilibru și galeria centralelor hidroelectrice sau în alte sisteme hidraulice de conducte cu rezervoare (conducte de sifon coborâtor sau urcător cu rezervor de mărime limitată la ieșire etc.)

10.3.1. Ecuațiile mișcărilor lent variate

La aceste mișcări se acceptă modelul lichidului incompresibil, deci variația de viteză se transmite instantaneu de la o extremitate la alta a conductei, deci $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$. Se scrie ecuația mișcării și de continuitate (fig. 10.39).

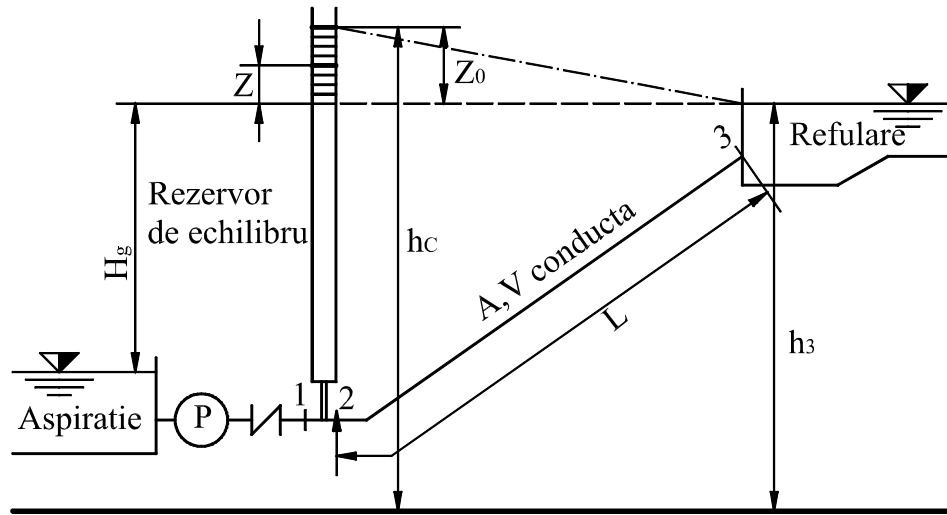


Fig. 10.39. Schema instalației de pompare cu rezervor de echilibru cu nivel liber

Ecuția energiei în mișcare nepermanentă între secțiunile 2 și 3 este

$$z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{\alpha_3 V_3^2}{2g} + \frac{1}{g} \int_2^3 \frac{\partial V}{\partial t} dl + hr \quad (10.102)$$

dar V fiind independent de l rezultă:

$$z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{\alpha_3 V_3^2}{2g} + \frac{L}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + hr \quad (10.103)$$

Din continuitate se poate scrie

$$Q_1 = Q_2 + Q_c \quad (10.104)$$

Secțiunile 1 și 2 fiind infinit vecine,

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \quad (10.105)$$

iar la intrarea în rezervorul de echilibru avem:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} - \left(z_c + \frac{p_c}{\gamma} \right) = M_c Q_c^2 \quad (10.106)$$

respectiv pierderile pe conductă între 2 și 3 se pot exprima sub forma

$$h_r = M_v V |V| \quad (10.107)$$

Se notează

$$M_v = \lambda \frac{L}{D} \frac{1}{2g}; h_1 = z_1 + \frac{p_1}{\gamma}; h_2 = z_2 + \frac{p_2}{\gamma}; h_3 = z_3 + \frac{p_3}{\gamma}; h_c = z_c + \frac{p_c}{\gamma}; z = h_c - h_3$$

Se știe

$$Q_c = A_c \frac{dh_c}{dt} \text{ și } Q_2 = AV$$

În aceste condiții ecuația de mișcare (10.103) și de continuitate (10.104) devin:

$$\left\{ z - \frac{L}{g} \frac{\partial V}{\partial t} - M_v |V| V - (h_c - h_2) = 0 \right. \quad (10.108)$$

$$\left\{ Q_1 = A_c \frac{dh_c}{dt} + AV \right. \quad (10.109)$$

$$\left\{ h_c - h_2 = M_c Q_c^2 = M A_c \frac{dh_c}{dt} \right. \quad (10.110)$$

Sistemul de trei ecuații conține trei necunoscute $-h_2$, h_c și V - care se obțin prin integrarea sistemului. Cazurile de integrare corespund neglijării pierderilor de sarcină (atât pe conductă cât și la intrarea în rezervorul de echilibru) sau considerării lor în mișcare laminară sau turbulentă.

10.3.2. Integrarea exactă a ecuațiilor mișcării

Se consideră cazul nefavorabil de oprire bruscă a pompei.

1. Neglijarea pierderilor de sarcină ($M_v=0$ și $M_c=0$)

În acesta ipoteză $h_c = h_2$; $h_2 = z + h_3$; $dh_c = dh_2 = dz$; $Q_1 = 0$ și ecuațiile (10.108... 10.110) devin

$$z = -\frac{L}{g} \frac{dV}{dt} \quad (10.111)$$

și

$$V = -\frac{A_c}{A} \frac{dz}{dt} \quad (10.112)$$

Se derivează (10.112) în raport cu timpul $\frac{dV}{dt} = -\frac{A_c}{A} \frac{d^2z}{dt^2}$ și se înlocuiește în (10.111), obținând

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{Ag}{A_c L} z = 0 \quad (10.113)$$

care este ecuația diferențială a oscilațiilor armonice. Notând $\sqrt{\frac{Ag}{A_c L}} = k$, soluția soluția generală a ecuațiilor este

$$z = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \quad (10.114)$$

Constantele de integrare rezultă din condițiile inițiale: pentru $t = 0$; $z = z_0$ și $V = V_0$ astfel: $C_1 = z_0$ și $C_2 = -\frac{VA}{A_c} \sqrt{\frac{A_c L}{Ag}}$ respectiv

$$z_0 = z_0 \cos \sqrt{\frac{Ag}{A_c L}} t - \frac{Q}{A_c} \sqrt{\frac{A_c L}{Ag}} \sin \sqrt{\frac{Ag}{A_c L}} t \quad (10.115)$$

care poate fi pusă sub forma

$$z = \sqrt{z_0^2 + \frac{Q^2 L}{A_c A_g}} \sin \left[\sqrt{\frac{Ag}{A_c L}} t + \arctg \left(\frac{A_c z_0}{Q} \sqrt{\frac{gA}{A_c L}} \right) \right] \quad (10.116)$$

Mișcarea este oscilatorie sinusoidal, cu perioada

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{A_c L}{gA}} \quad (10.117)$$

și amplitudinile maxime și minime

$$\begin{cases} z_{\max} = \sqrt{z_0^2 + \frac{Q^2 L}{g A A_c}} \\ z_{\min} = -\sqrt{z_0^2 + \frac{Q^2 L}{g A A_c}} \end{cases} \quad (10.118)$$

superioare denivelării inițiale z_0 (fig. 10.40).

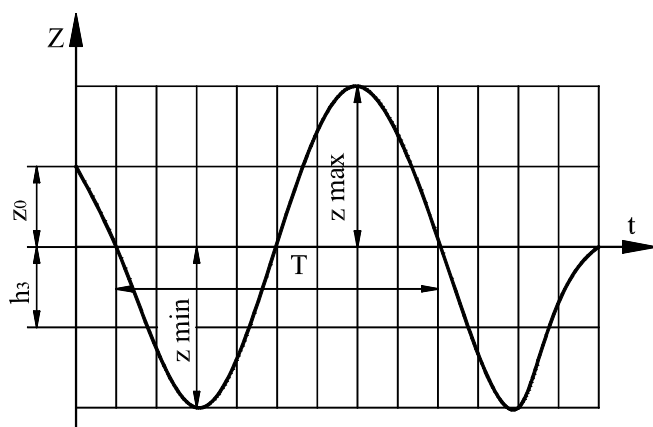


Fig. 10.40. Variația nivelului apei în rezervorul de echilibru la neglijarea pierderi de sarcină

Oscilațiile de nivel nu se amortizează fiindcă s-au neglijat pierderile de sarcină.

2. Pierderile de sarcină pe conductă se consideră proporționale cu viteza (regim laminar), iar la intrarea în rezervor se neglijează

Situația nu corespunde realității, dar evidențiază calitativ rolul pierderii de sarcină. Pentru $h_c = h_2$; $h_r = M_v V$ și oprirea pompei $Q_I = 0$, rezultă:

$$\begin{cases} z = \frac{L}{g} \frac{dV}{dt} + M_v \end{cases} \quad (10.119)$$

$$\begin{cases} V = -\frac{A_c}{A} \frac{dz}{dt} \end{cases} \quad (10.112)$$

sau după eliminarea lui V ,

$$\frac{d^2 z}{dt^2} \pm \frac{g M_v}{L} \frac{dz}{dt} + \frac{g A}{L A_c} z = 0 \quad (10.120)$$

După înlocuirea $z = e^{rt}$, ecuația caracteristică devine:

$$r^2 \pm \frac{gM_v}{L}r + \frac{gA}{LA_c} = 0 \quad (10.121)$$

din care se obține

$$r^2 = -\frac{gM_v}{L} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g^2 M_v^2}{L^2} - 4 \frac{gA}{LA_c}} \quad (10.122)$$

Se disting trei situații:

a) discriminantul negativ, $\frac{M_v^2}{4} < \frac{LA}{gA_c}$, pierderile de sarcină sunt relativ mici, rezultă:

$$r_{1,2} = -\frac{gM_v}{2L} \pm i \sqrt{\frac{gA}{LA_c}} \sqrt{1 - \frac{M_v^2}{4} \frac{gA_c}{LA}} \quad (10.123)$$

Soluția ecuației (10.120) este

$$z = e^{-\frac{gM_v}{2L}t} \left[C_1 \cos \left(\sqrt{\frac{gA}{LA_c}} \sqrt{1 - \frac{M_v^2}{4} \frac{gA_c}{LA}} t \right) + C_2 \sin \left(\sqrt{\frac{gA}{LA_c}} \sqrt{1 - \frac{M_v^2}{4} \frac{gA_c}{LA}} t \right) \right] \quad (10.124)$$

Pentru condițiile la limită din cazul precedent rezultă $C_1 = z_0$ și

$$C_2 = \frac{M_v z_0}{2} \sqrt{\frac{gA_c}{LA}} - \frac{\frac{Q}{A_c} \sqrt{\frac{LA_c}{gA}}}{\sqrt{1 - \frac{M_v^2}{4} \frac{gA_c}{LA}}}$$

respectiv (10.124) devine

$$z = e^{-\frac{gM_v}{2L}t} \left\{ z_0 \cos \left(\sqrt{\frac{gA}{LA_c}} \sqrt{1 - \frac{M_v^2}{4} \frac{gA_c}{LA}} t \right) - \left[\frac{\frac{Q}{A_c} \sqrt{\frac{LA_c}{gA}}}{\sqrt{1 - \frac{M_v^2}{4} \frac{gA_c}{LA}}} - \frac{M_v z_0}{2} \sqrt{\frac{gA}{LA_c}} \right] \sin \left(\sqrt{\frac{gA}{LA_c}} \sqrt{1 - \frac{M_v^2}{4} \frac{gA_c}{LA}} t \right) \right\} \quad (10.125)$$

Mișcarea nivelului apei în rezervorul de echilibru este **oscilatorie amortizată**, cu amplitudine monoton descrescătoare (fig. 10.41)

$$Ampl = e^{-\frac{gM_v}{2L}t} \sqrt{z_0^2 + C_2^2} \quad (10.126)$$

Perioada convențională (perioada între două elongații de același sens) este

$$T = 2\pi \frac{\sqrt{\frac{L}{g} \frac{A_c}{A}}}{\sqrt{1 - \frac{M_v^2}{4} \frac{gA_c}{LA}}} \quad (10.127)$$

Pierderile de sarcină măresc perioada oscilației.

b) discriminant nul, $\frac{M_v^2}{4} = \frac{LA}{gA_c}$, ecuația (10.124) are rădăcină dublă,

cu soluții particulare de formele $z = e^{rt}$ și $z = te^{rt}$. Soluția generală este de forma

$$z = e^{-\frac{gM_v}{2L}t} (C_1 t + C_2) \quad (10.128)$$

Constantele de integrare rezultă din condițiile inițiale

$$C_2 = z_0 \text{ și } C_1 = \frac{gz_0 M_v}{2L} - \frac{Q}{A_c}$$

obținând

$$z = e^{-\frac{gM_v}{2L}t} \left[z_0 + \left(\frac{gz_0 M_v}{2L} - \frac{Q}{A_c} \right) t \right] \quad (10.129)$$

Diferența de nivel z din rezervorul de echilibru tinde asimptotic la nivelul hidrostatic h_3 . Mișcarea este **aperiodică**: dacă $\frac{M_v}{2} > \frac{QL}{gz_0 A_c}$, z rămâne tot timpul pozitiv, iar dacă $\frac{M_v}{2} < \frac{QL}{gz_0 A_c}$, z trece de la valori pozitive la negative și tinde la zero, rămânând totdeauna negativă (fig. 10.41).

c) **discriminant pozitiv**, $\frac{M_v}{2} > \frac{L}{g} \frac{A}{A_c}$, pierderile de sarcină sunt mari, soluția generală a ecuației (10.122) fiind

$$z = C_1 e^{-\frac{gM_v}{2L} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{M_v^2} \frac{LA}{gA_c}} \right) t} + C_2 e^{-\frac{gM_v}{2L} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{M_v^2} \frac{LA}{gA_c}} \right) t} \quad (10.130)$$

constantele de integrare fiind:

$$C_1 = \frac{1}{2} \left(z_0 + \frac{\frac{gz_0 M_v}{2L} - \frac{Q}{A_c}}{\frac{gM_v}{2L} \sqrt{1 - \frac{4}{M_v^2} \frac{LA}{gA_c}}} \right) \quad (10.131)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left(z_0 + \frac{\frac{gz_0 M_v}{2L} - \frac{Q}{A_c}}{\frac{gM_v}{2L} \sqrt{1 - \frac{4}{M_v^2} \frac{LA}{gA_c}}} \right) \quad (10.132)$$

Mișcarea este aperiodică, z nu-și schimbă semnul și tinde la zero în timp (fig. 10.41).

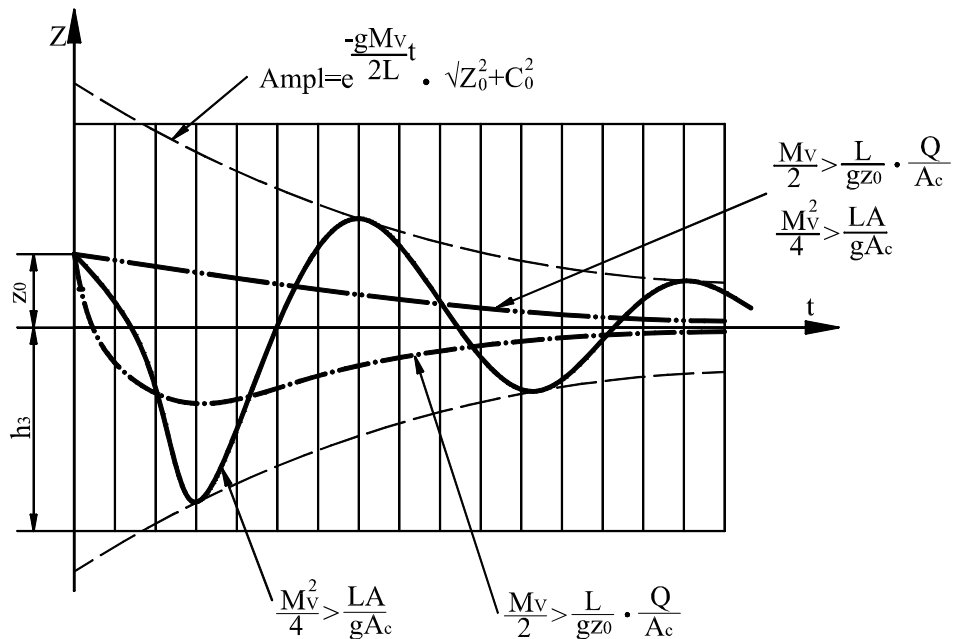


Fig. 10.41. Variația nivelului în rezervorul de echilibru când $hr = M_v V$.

3. Pierderile de sarcină se consideră în regim turbulent atât pentru intrarea în rezervorul de echilibru cât și pe conductă

Rezistența locală la intrare în rezervorul de echilibru se poate considera asimetrică.

Ecuatiile mișcării (10.108 ...10.110), pentru $Q_1 = 0$; $z = h_c - hs$

$$h_2 - h_c = M_c A_c^2 \left(\frac{dh_c}{dt} \right)^2 = M_c A_c^2 \left(\frac{dz}{dt} \right)^2$$

$$V = -\frac{A_c}{A} \frac{dh_c}{dt} = -\frac{A_c}{A} \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{A_c}{A} \frac{d^2 z}{dt^2}$$

devin

$$z - \left(M_v \frac{A_c^2}{A^2} + M_{cc} A_c^2 \right) \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{L}{g} \frac{A_c}{A} \frac{d^2 z}{dt^2} = 0 \quad (10.133)$$

pentru $V > 0$ și $\frac{dz}{dt} < 0$ și

$$z + \left(M_v \frac{A_c^2}{A^2} + M_{cu} A_c^2 \right) \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{L}{g} \frac{A_c}{A} \frac{d^2 z}{dt^2} = 0 \quad (10.134)$$

pentru $V < 0$ și $\frac{dz}{dt} > 0$. S-a considerat M_{cc} modulul de debit al rezistenței hidraulice asimetrice când nivelul coboară în rezervorul de echilibru și M_{cu} când nivelul urcă.

Notând cu

$$m = \frac{2gA \cdot A_c}{L} \left(M_c + \frac{M_v}{A^2} \right) \text{ și } n = \frac{gA}{L \cdot A_c},$$

ținând seama de natura asimetrică a lui $m(m_{ub}, m_c)$, datorită lui $M_c(M_{cu}, M_{cc})$, ecuațiile (10.133 și 10.134) devin

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{m}{2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + nz = 0 \quad (10.135)$$

Pentru $\frac{dz}{dt} < 0$, $m = m_c = \frac{2gA \cdot A_c}{L} \left(M_{cc} + \frac{M_v}{A^2} \right)$ și
 pentru $\frac{dz}{dt} > 0$, $m = -m_u = -\frac{2gA \cdot A_c}{L} \left(M_{cu} + \frac{M_v}{A^2} \right)$.

Se utilizează substituția

$$u = \frac{dz}{dt} \quad (10.136)$$

respectiv

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dz} \frac{dz}{dt} = u \frac{du}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(u^2)}{dt},$$

(10.135) devenind

$$\frac{1}{2} \frac{d(u^2)}{dz} - \frac{m}{2} u^2 + nz = 0 \quad (10.137)$$

Notând $u^2 = w$ (10.137) se transformă într-o ecuație diferențială liniară neomogenă de prim ordin:

$$\frac{dw}{dz} - mw + 2nz = 0 \quad (10.138)$$

Soluția ecuației omogene este

$$w_1 = C_1 e^{mz} \quad (10.139)$$

iar o soluție particulară a ecuației neomogene se caută de forma

$$w_2 = C_2 z + C_3 \quad (10.140)$$

Cu soluția particulară din (10.138) se obțin

$$C_2 = \frac{2n}{m} \text{ și } C_3 = \frac{2n}{m^2} \quad (10.141)$$

Soluția generală a lui (10.138) este

$$w = C_1 e^{mz} + \frac{2n}{m} z + \frac{2n}{m^2} \quad (10.141)$$

sau pentru $V > 0$

$$\frac{dz}{dt} = -\sqrt{\frac{2n}{m_c} z + \frac{2n}{m_c^2}} + C_1 e^{-m_c z} \quad (10.142)$$

și pentru $V < 0$

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{-\frac{2n}{m_u}z + \frac{2n}{m_u^2} + C_1 e^{-m_u z}} \quad (10.143)$$

Constanta C_1 se determină din prima semioscilație, din condițiile inițiale, iar pentru celelalte din condiția de continuitate a elongației.

Condițiile inițiale sunt:

$$t = 0, w = u^2 = \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{Q}{A_c}\right)^2; \frac{dz}{dt} = -\frac{Q}{A_c}; z = z_0$$

pentru prima semioscilație obținând:

$$C_1 = \left(\frac{Q^2}{A_c^2} - \frac{2nz_0}{m_c} - \frac{2n}{m_c^2}\right) e^{-m_c z_0} \quad (10.144)$$

Din definirea lui m_c rezultă

$$\frac{2n}{m_c} = \frac{1}{A_c^2 \left(M_{cc} + \frac{M_v}{A^2}\right)}$$

iar pierderea de sarcină în momentul inițial este:

$$z_0 = M_{cc} Q^2 + M_v V^2 = Q^2 \left(M_{cc} + \frac{M_v}{A^2}\right),$$

deci

$$\frac{Q^2}{A_c^2} = \frac{2nz_0}{m_c} \text{ și } C_1 = -\frac{2n}{m_c^2} e^{-m_c z_0} \quad (10.145)$$

Relația (10.142) pentru prima semioscilație devine:

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{2n}{m_c^2} \left[m_c z + 1 - e^{-m_c(z-z_0)}\right]} \quad (10.146)$$

Condiția de extrem, $dz/dt=0$, conduce la:

$$\frac{e^{m_c z}}{1 + m_c z} = e^{m_c z_0} \quad (10.147)$$

care se rezolvă grafic (fig. 10.42).

Se obțin două valori $z_1 > 0$ și $z_2 < 0$. Valoarea $z_1 > 0$ este ireală, corespunzând timpului $t < 0$. Rămâne valabilă valoarea $z_2 < 0$, care este nivelul minim din rezervorul de echilibru la prima semioscilație.

$$\frac{e^{m_c z_2}}{1 + m_c z_2} = e^{m_c z_0} \quad (10.148)$$

La semioscilația următoare nivelul în rezervorul de echilibru crește $dz/dt > 0$, iar viteza apei în conductă este negativă (alimentează rezervorul) și este valabilă relația (10.143). Constanta C_1 se determină din condiția continuității curbei oscilațiilor nivelului în timp. Elongația calculată cu relația (10.143) să fie identică cu z_2 , rădăcina ecuației (10.147). La $z = z_2$ nivelul apei în rezervorul de echilibru este staționar și $dz/dt = 0$, sau

$$-\frac{2n}{m_u} z_2 + \frac{2n}{m_u^2} + C_1 e^{-m_u z_2} = 0,$$

de unde

$$C_1 = \left(\frac{2n}{m_u} z_2 - \frac{2n}{m_u^2} \right) e^{m_u z_2} \quad (10.149)$$

C_1 introdus în (10.143), cu condiția $dz/dt = 0$ stabilește a treia elongație maxim pozitivă, $z = z_3$, din relația:

$$\frac{e^{-m_u z_3}}{1 - m_u z_3} = \frac{e^{m_u z_2}}{1 - m_u z_2} \quad (10.150)$$

Semioscilația următoare este descrisă de ecuația (10.142) în care constanta C_1 rezultă din condiția $z = z_3$ și $dz/dt = 0$;

$$\frac{2n}{m_c} z_3 + \frac{2n}{m_c} + C_1 e^{m_c z_3} = 0$$

sau

$$C_1 = -\frac{2n}{m_c^2} (m_c z_3 + 1) e^{-m_c z_3} \quad (10.151)$$

Cu acest C_1 , înlocuit în (10.142) și cu condiția $dz/dt = 0$, se găsește elongația negativă z_4 , corespunzătoare semioscilației 3, din relația

$$\frac{e^{m_c z_4}}{1 + m_c z_4} = \frac{e^{m_c z_3}}{1 + m_c z_3} \quad (10.152)$$

Celelalte oscilații se obțin în mod analog.

Pentru elongația maximă negativă, z_i (dacă i este par) se utilizează relația

$$\frac{e^{m_c z_i}}{1 + m_c z_i} = \frac{e^{m_c z_{i-1}}}{1 + m_c z_{i-1}} \quad (10.153)$$

în care $z_{i-1} > 0$.

Pentru elongația maximă pozitivă, z_{i+1} (cu z_{i+1} impar) se folosește relația

$$\frac{e^{-m_u z_{i+1}}}{1 - m_u z_{i+1}} = \frac{e^{-m_u z_i}}{1 - m_u z_i} \quad (10.154)$$

în care $z_i < 0$. Ecuatiile (10.153 și 10.154) sunt valabile pentru $i \geq 2$.

Rezolvarea ecuațiilor (10.153) și (10.154) pe cale grafică este ușoară. Se reprezintă funcțiile

$$F_1(z) = \frac{e^{m_c z}}{1 + m_c z} \text{ și } F_2(z) = \frac{e^{-m_u z}}{1 - m_u z} \quad (10.155)$$

apoi pe curba $e^{m_c z}$, cu $z=z_0$ se găsește punctul M_c și punctele M_1 și M_2 (pe curba $F_1(z)$), de abscisele z_1 și z_2 , apoi cu z_2 pe curba $F_2(z)$ se găsesc punctele M'_2 și M_3 , de abscise z_2 și z_3 ; cu z_3 pe curba $F_1(z)$ se găsesc punctele M'_3 și M_4 , cu abscisa z_1 ș.a.m.d. (fig. 10.42). Perioada oscilației se poate lua după (10.127).

Rezervorul cu nivel liber trebuie astfel dimensionat încât oscilațiile de nivel să rămână în interiorul acestuia. În raport cu rezistențele hidraulice pe conductă și la derivația rezervorului, mișcarea poate fi oscilatorie amortizată sau aperiodică.

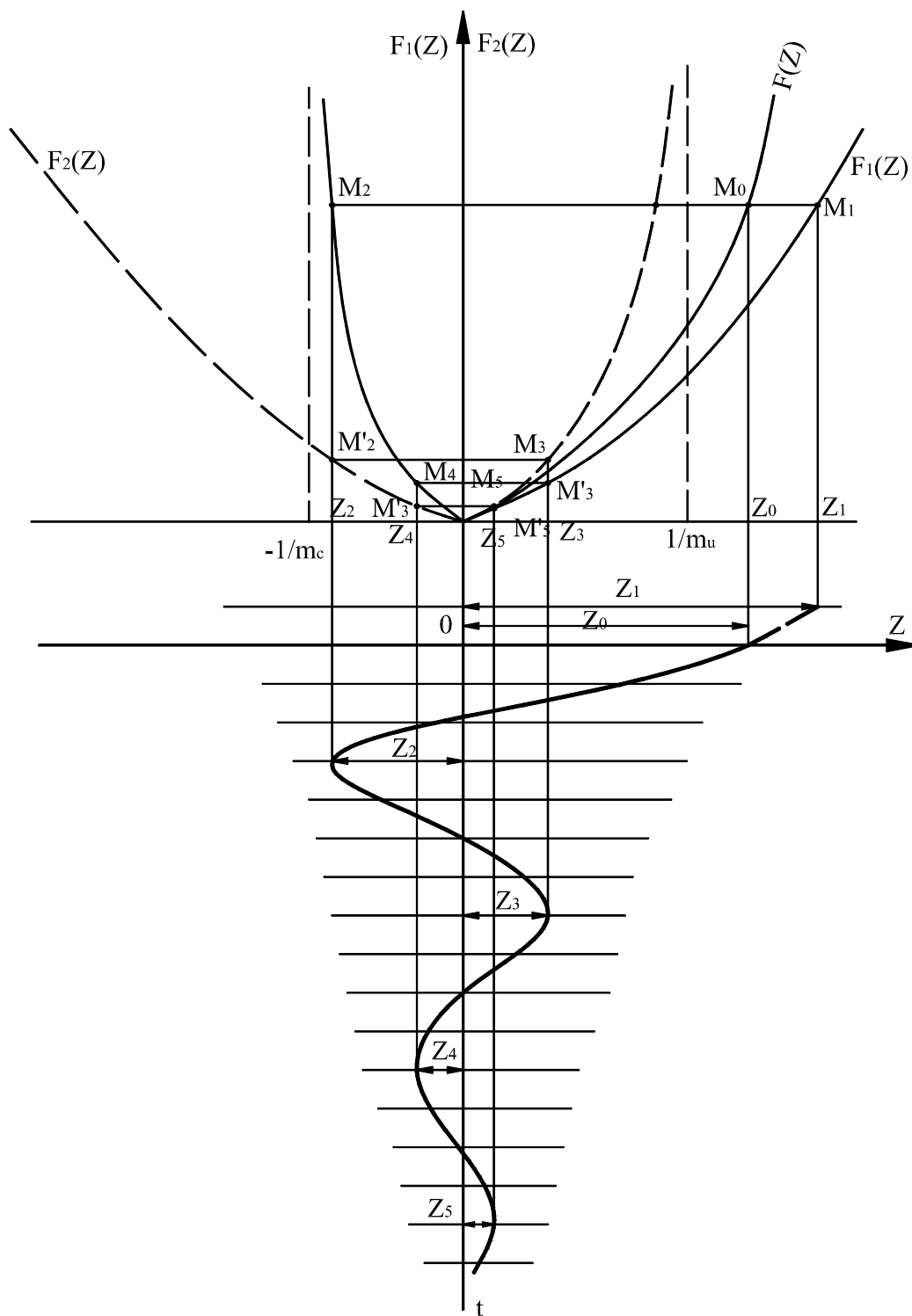


Fig. 10.42. Soluționarea grafică a oscilațiilor de masă în rezervor cu nivel liber și rezistență hidraulică asimetrică în turbulență pătratică

10.3.3. Alte metode de soluționare ale ecuațiilor mișcării lent variate

1. Metoda diferențelor finite

În ultima perioadă frecvent se utilizează metode numerice pentru soluționarea ecuațiilor (10.108... 10.110). În acest scop ecuațiile se transcriu în diferențe finite.

Eliminând din ecuațiile menționate $h_c - h_2$ și știind că $\frac{dh_c}{dt} = \frac{dz}{dt}$, se obține

$$z - \frac{L}{g} \frac{dv}{dt} - M_v |V| V + M_c A_c^2 \left| \frac{dz}{dt} \right| \frac{dz}{dt} = 0 \quad (10.156)$$

și

$$Q_l = A_c \frac{dz}{dt} + AV \quad (10.157)$$

în care: $M_c = M_{cc}$ pentru $\frac{dz}{dt} < 0$ și $M_c = M_{cu}$ pentru $\frac{dz}{dt} > 0$.

Secțiunea orizontală a rezervorului de echilibru poate fi variabilă $A_c = A_c(z)$.

Se înlocuiesc diferențialele cu diferențe finite, astfel: $dt = \Delta t$; $dz = \Delta z$ și $dV = \Delta V$, iar ecuațiile (10.156 și 10.157) se scriu pentru valori medii ale variabilelor

$$z_m - \frac{L}{g} \frac{\Delta V}{\Delta t} - M_v |V_m| V + M_c A_{cm}^2 \left| \frac{\Delta z}{\Delta t} \right| \frac{\Delta z}{\Delta t} = 0 \quad (10.158)$$

$$Q_{lm} = A_{cm} \frac{\Delta z}{\Delta t} - AV_m \quad (10.159)$$

în care

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i; \Delta z = z_{i+1} - z_i; \Delta V = V_{i+1} - V_i; V_m = \frac{1}{2}(V_{i+1} + V_i);$$

$$A_{cm} = \frac{1}{2}(A_{c(i+1)} + A_{ci}); Q_{lm} = \frac{1}{2}(Q_{l(i+1)} + Q_{l,i}).$$

La momentul inițial, $i=0$, se cunosc valorile tuturor variabilelor. În orice moment i se cunoaște debitul pompei (din topogramă, iar după oprire $Q_l=0$).

Algoritmul poate fi următorul:

- se adoptă un pas de timp Δt (pe durata opririi pompei, t_0 ,

$$\Delta t = t_0 / (15 \dots 25), \text{ iar după oprire } \Delta t = T_0 / (40 \dots 60), \text{ cu } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g} \frac{A_c}{A}}.$$

La momentul t_{i+1} se calculează $Q_{1,i+1}$ și Q_{1m} .

- se dă o valoare $z'_{i+1} \neq z_i$ ($z_{(i+1)}' = z_i + \Delta z$, eventual cu Δz din pasul anterior) și se determină la z'_{i+1} valoarea A_{cm} ;

- din (10.159) se calculează V_m ;

- din (10.158) se determină z_m , apoi $z_{(i+1)}'' = 2z_m - z_i$;

- se compară z'_{i+1} cu z_{i+1}'' , iar când $|z_{(i+1)}' - z_{(i+1)}''| \leq \varepsilon z$ se trece la pasul următor. În caz contrar se adoptă o nouă valoare pentru z'_{i+1} .

$$z'_{i+1} = \frac{1}{2}(z'_{i+1} + z_{i+1}'') \quad (10.160)$$

și se repetă calculele.

Calculele pot fi efectuate cu calculatorul sau chiar manual.

2. Metoda grafică (după Schoklitsch)

Acesta metodă constă în soluționarea pe cale grafică a ecuațiilor (10.158) și (10.159). Se neglijează pierderea de sarcină la intrarea în rezervorul de echilibru, iar ecuațiile se pun sub forma

$$W = \frac{g}{L}(z - h_r)\Delta t \quad (10.161)$$

$$\Delta z = (Q - AV) \frac{\Delta t}{A_c} \quad (10.162)$$

În planurile figurative $z - V$, $z - W$, $z - t$ se trasează mai multe curbe, luând ca origine un punct O , la nivelul hidrostatic $h = Hg$. Pe axa absciselor se ia viteza V , pozitivă spre stânga și timpul t la dreapta, cu unitatea de timp $\Delta t = T_0 / (20 \dots 30)$, iar pe ordonată z (variația de nivel în rezervorul de echilibru).

Curba I. Curba pierderilor de sarcină pe conductă, între secțiunile 2 și 3, cu caracteristica $h_r = \pm M_v V^2$, în stânga pentru viteze pozitive, în dreapta pentru viteze negative;

Curba II. $\Delta V = \frac{g}{L} z \cdot \Delta t$, pentru $\Delta t = \text{const}$. Paralel cu aceasta se vor duce drepte reprezentate de ecuația (10.161), când hr ia diferite valori;

Curba III, reprezintă volumul intrat (sau ieșit) în (din) rezervorul de echilibru în timpul Δt , corespunzătoare diferitelor viteze V de pe conductă

$$\Delta W = A \cdot \Delta t \cdot V$$

Se construiește pentru $\Delta t = \text{const}$. Se trasează cu originea în O și având aceeași abscisă cu curba I, însă ordonata divizată în volume. Are valori negative pentru V pozitiv și invers.

Curba IV este curba volumului acumulat în rezervorul de echilibru $W(z)$, cu creșterile de volum ΔW pe abscisă, iar z pe ordonată. Pentru claritatea figurii se preferă ca aceasta să fie trasată în afara construcției grafice anterioare, luându-se o origine arbitrară pe axa vitezelor. Curba permite determinarea variației de nivel Δz sub variația de volum ΔW (fig. 10.43).

Curba V, reprezintă variația volumului în unitatea de timp Δt , deci caracterizează variația debitului pompat în timp. Se obține din curba de oprire la diferiți timpi Δt .

$$\Delta W_p = Q_{p(n)} \Delta t$$

După oprirea pompei valoarea sa se ia nulă. Această curbă se poate construi separat.

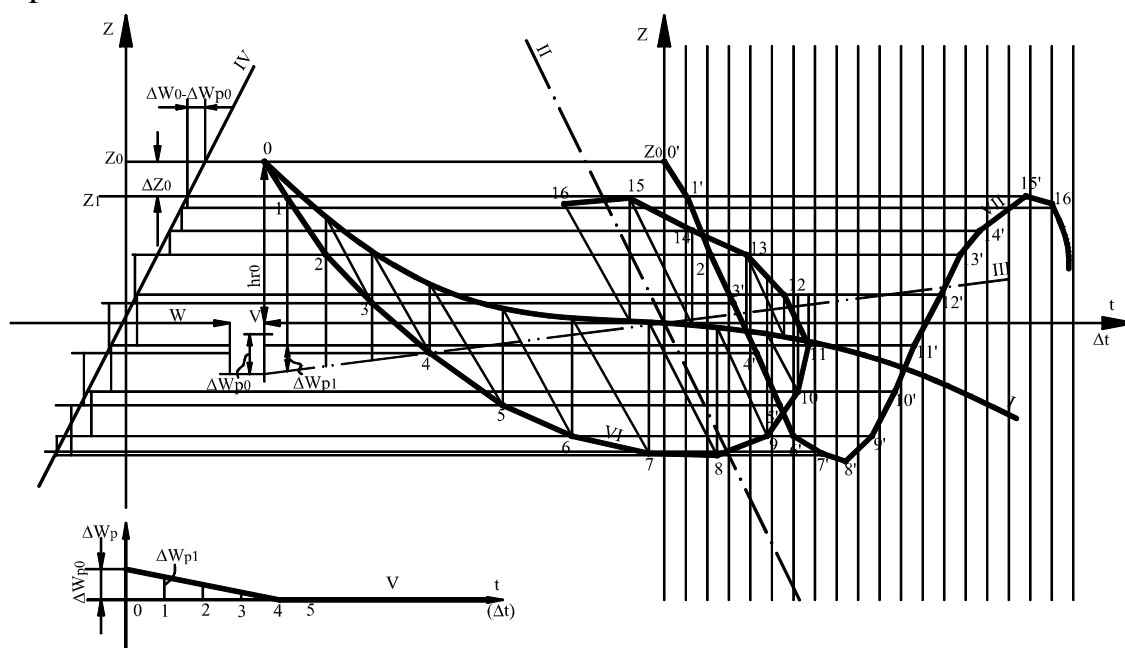


Fig. 10.43. Soluția grafică a oscilațiilor de masă în rezervor de echilibru la instalație de pompare

Rezolvarea sistemului de ecuații se face astfel:

- se pleacă din punctul 0, situat pe curba I, corespunzător punctului de funcționare în momentul $t = 0$, având pierderi hr_0 , nivelul din rezervorul de echilibru fiind z_0 . Din acest punct se duce o orizontală până la curba IV și la $t = 0$, o verticală până la dreapta III și o paralelă la II. Din curba V, pentru momentul $t = 0$ se obține volumul pompat în timpul Δt , ΔW_{po} , care se scade din volumul ΔW ce ar ieși din rezervorul de echilibru fără pompare (obținut pe verticală între abscisă și curba III). Cantitatea $\Delta W_0 - \Delta W_{po}$ este volumul efectiv ieșit din rezervor, se plasează pe orizontală, cu originea pe curba IV în stânga. De la extremitatea sa se duce verticala până la curba IV, segmentul vertical reprezentând scăderea de nivel Δz_0 în timpul Δt și determină pe axa Z nivelul din rezervor în momentul $t = \Delta t$. Din acest punct se duce o orizontală până la $t = \Delta t$, punctul obținut 1' reprezentând nivelul din rezervor în $t = \Delta t$, deci $z(t)$. Intersecția acestei orizontale cu paralela la II din pct. O, determină punctul 1 de pe curba $z(V)$, cu care se determină parametrii de funcționare în momentul $t = \Delta t$, $V = V_1, hr = hr_1, \Delta W = \Delta W_1$. Celelalte puncte se obțin după același algoritm, rezultând în final curba spirală $z = z(V)$ și oscilația nivelului în rezervorul de echilibru $z = z(t)$.

Mărimile z și V obținute prin această construcție grafică corespund începutului de interval de timp și nu valorilor medii pe interval. Sporirea preciziei metodei presupune reducerea intervalului de timp Δt .

10.4. Aplicații

10.1. O instalație de pompare refulează pe o conductă din oțel vechi, cu $D = 1200$ mm, $L = 1706$ m, $e = 6$ mm, la înălțimea geodezică de pompare $H_g = 20$ m. Caracteristica pompei corespunde tabelului 10.2. Conducta este prevăzută cu clapet de reținere la pompă. Cunosând $\varepsilon = 2,06 \cdot 10^4$ daN / cm², $E = 2,25 \cdot 10^6$ daN / cm² și $\rho = 1000$ kg / m³, să se calculeze presiunea la pompă la întreruperea alimentării cu energie electrică. Schema instalației corespunde figurii 10.28.

Tabelul 10.2 Caracteristica pompei

$n_0 = 585 \text{ rot/min}, \phi = 720 \text{ mm}, \eta_{\max} = 0,76$						
Q (m ³ /s)	0,333	0,764	1,041	1,278	1,470	1,583
H (mCA)	28	26	24	22	20	18

Curba de orpire este dată grafic în fig. 10.44.

Rezolvare:

1. Se determină celeritatea

$$C = \frac{\sqrt{\varepsilon / \rho}}{\sqrt{1 + \frac{D}{e} \frac{\varepsilon}{E}}} = \frac{\sqrt{2,06 \cdot 10^9 / 1000}}{\sqrt{1 + \frac{1,2}{0,006} \frac{2,06 \cdot 10^9}{2,25 \cdot 10^{11}}}} = 853 \text{ m/s}$$

2. Timpul de reflexie a undelor de presiune

$$\tau = \frac{2L}{c} = \frac{2,1706}{853} = 4,0 \text{ s}$$

Timpul de calcul se acceptă

$$\mu = \tau / 2 = 4 / 2 = 2 \text{ s}$$

3. Caracteristica conductei

- se determină $\lambda = 0,0191 \times 1,15 \times 1,18 = 0,02595$ (conductă veche din oțel montată prin sudură în condiții de șantier);

- pierderile de sarcină sunt:

$$h_r = \lambda \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = \frac{8\lambda l}{g\pi^2 D^5} Q^2 = \frac{8 \cdot 0,02595 \cdot 1706}{9,81\pi^2 \cdot 1,25^5} Q^2 = 1,470 Q^2$$

- caracteristica conductei este

$$h = H_g \pm MQ^2 = 20 \pm 1,470 Q^2$$

4. Caracteristicile loviturii de berbec

- coeficientul unghiular al dreptelor undelor de presiune

$$\frac{c}{gA} = \frac{4c}{g\pi D^2} = \frac{4 \cdot 853}{9,81\pi \cdot 1,2^2} = 76,88$$

- caracteristica undelor de presiune

$$h - h_i = \pm \frac{c}{gA} (Q - Q_i); h - h_i = \pm 76,88 (Q - Q_i)$$

Caracteristicile pompei la diferite momente se calculează pe baza curbei de oprire din fig. 10.44.

Reprezentarea grafică a caracteristicii conductei și a pompei la n_0 (fig. 10.44) stabilește punctul de funcționare inițial $H_0 = 22,25 \text{ m}$ și $Q_0 = 1,26 \text{ m}^3/\text{s}$. Se reprezintă caracteristicile pompei la diferite momente și se intersectează cu caracteristicile undelor de presiune la momente corespundente $\mu, 2\mu, 3\mu, 4\mu$ și 6μ după care caracteristica loviturii întâlnește clapetul închis. În cazul de față presiunea minimă se obține când caracteristicile undei de presiune, clapetului și pompei se întâlnesc în punct comun, care aproape corespunde $t = 6,5\mu$, după care oscilațiile de presiune și de debit întâlnesc caracteristica clapetului închis. Soluția problemei corespunde fig. 10.44, în care este prezentată și variația presiunii în timp la pompă.

Tabel 10.3. Caracteristicile pompei s-au calculat după relațiile (10.51)

t (s)	n (rot/min)	Caracteristica de sarcină (Q în m^3/s , H în mCA)							n/ n_0
$0,5\mu = 1$	479,3	Q	-	-	-	1,086	1,250	1,346	0,850
		H	-	-	-	15,90	14,45	13,01	
$\mu = 2$	447,5	Q	0,254	0,584	0,796	0,977	1,125	1,210	0,765
		H	16,39	15,22	14,05	12,87	11,70	10,53	
$2\mu = 4$	386,6	Q	0,210	0,481	0,656	0,805	0,926	0,997	0,63
		H	11,11	10,32	9,53	8,73	7,94	7,14	
$2,5\mu = 5$	329,4	Q	-	0,430	0,586	0,720	0,828	0,891	0,563
		H	-	8,24	7,61	6,97	6,34	5,71	
$3\mu = 6$	304,2	Q	0,173	0,397	0,541	0,665	0,764	0,823	0,520
		H	5,57	7,03	6,49	5,95	5,41	4,87	
$4\mu = 8$	257,4	Q	0,147	0,336	0,458	0,562	0,647	0,697	0,440
		H	5,42	5,03	4,65	4,26	3,87	3,48	
$4,5\mu = 9$	234,0	Q	0,133	0,306	0,416	0,511	0,588	0,633	0,400
		H	4,48	4,16	3,84	3,52	3,20	2,88	
$5\mu = 10$	216,5	Q	0,123	0,283	0,386	0,473	0,544	0,586	0,370
		H	3,83	3,56	3,29	3,01	2,74	2,46	
$6\mu = 12$	181,4	Q	0,103	0,237	0,323	0,396	0,456	0,491	0,310
		H	2,69	2,50	2,31	2,11	1,92	1,73	
$6,5\mu = 13$	169,7	Q	0,097	0,220	0,302	-	-	-	0,290
		H	1 2,35	2,19	2,02	-	-	-	

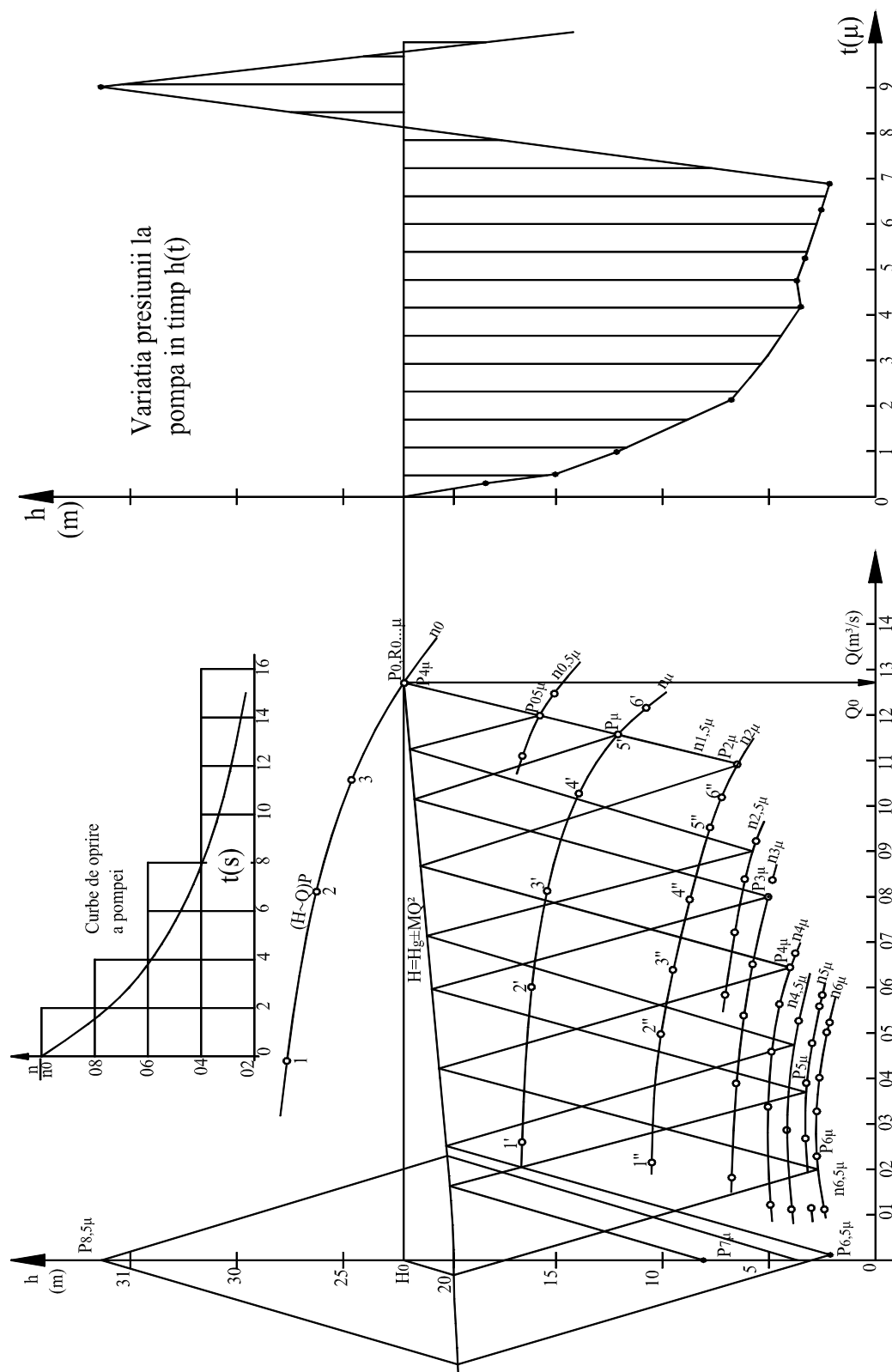


Fig. 10.44. Soluția grafică a loviturii de berbec

10.2. Să se calculeze lovitura de berbec în instalația de pompare din problema 10.1, dacă curba de oprire corespunde fig. 10.45, iar presiunea de vaporizare este $\frac{p_{vap}}{\gamma} = -7mCA$.

Rezolvare: Calculele sunt identice cu problema 10.1 până la caracteristica pompei la diferite momente, care devine

t (s)	n (rot/ min)	Caracteristica de sarcină							$\frac{n}{n_0}$
2	292,5	Q H	0,167 7,00	0,382 6,50	0,521 6,00	0,639 5,50	0,735 5,00	0,792 4,50	0,500

Soluția grafică a loviturii de berbec corespunde fig. 10.45.

Se observă că dreapta caracteristică F , care pleacă de la rezervor la momentul $t=3\mu$ întâlnește caracteristica presiunii de vaporizare; mersul calculului corespunzând fig. 10.29 și 10.30. Presiunile extreme sunt foarte mari față de presiunea de regim: $p_{nom}=22,4mCA$, $p_{max}=76mCA$, $p_{min}=-7mCA$ și suprasolicită conducta. Înfășurătoarea presiunilor extreme în timp tinde la Hg.

Într-o asemenea situație este recomandabilă protejarea conductei cu rezervor de echilibru sau cu pernă de aer.

10.3. Să se calculeze variația de nivel în rezervorul de echilibru pentru protecția instalației de pompare din problema 10.2. Rezervorul este amplasat după clapetul de reținere și are diametrul $D_r=4$ m. Se neglijează pierderile la intrarea și ieșirea din rezervor. Instalația corespunde fig. 10.31.

Rezolvare:

1. Soluția grafică (Schoklitsch). Se construiesc curbele I-IV, astfel:

-Curba I a pierderilor de sarcină pe conductă

$$hr = \lambda \frac{l}{D} \frac{V^2}{2g} = \frac{0,02595 \cdot 1706}{1,2 \cdot 2 \cdot 9,81} = 1,880V^2$$

- se alege timp de calcul $\Delta t = 20s$;

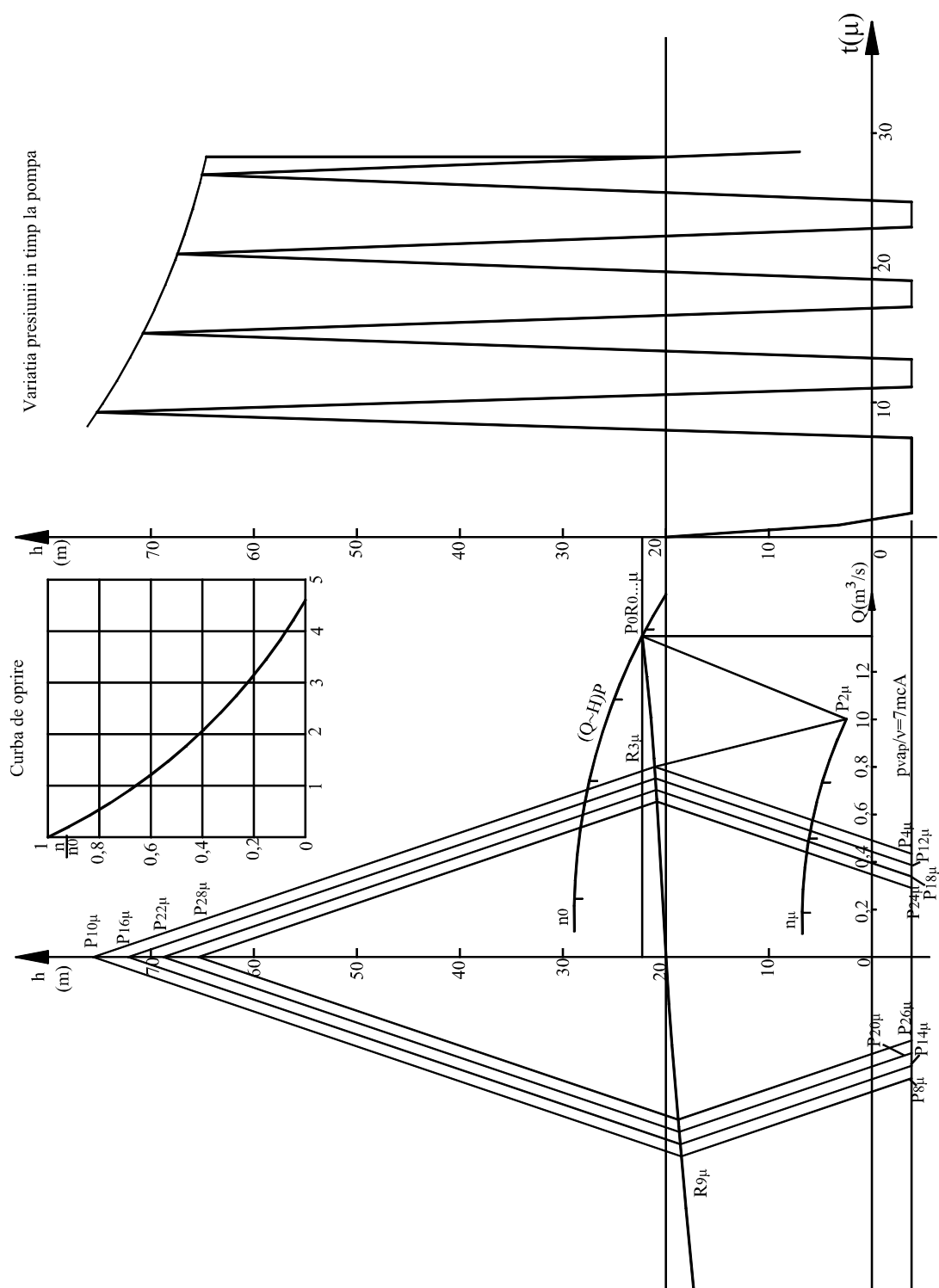


Fig. 10.45. Soluția grafică a loviturii de berbec în instalația de pompare cu apariția cavităției

- curba II

$$\Delta V = \frac{g}{L} \Delta t \cdot z = \frac{9,81 \cdot 20}{1706} z = 0,115z$$

- curba III, volumul intrat (ieșit) în (din) rezervorul de echilibru

$$\Delta W = A \cdot \Delta t \cdot V = \frac{\pi D^2}{4} \Delta t \cdot V = \frac{\pi 1,2^2}{4} 20V = 21,6V$$

- curba IV, curba volumului acumulat în rezervorul de echilibru în funcție de variația de nivel

$$\Delta W(z) = A_c z = \frac{\pi D_r^2}{4} z = \frac{\pi 4^2}{4} z = 12,57 \cdot z$$

- se alege scara pentru reprezentare grafică, astfel:

- pentru cotă $z \quad 1 \text{ m} = 3 \text{ cm}$
- pentru viteză $V \quad 1 \text{ m/s} = 10 \text{ cm}$
- pentru volum $W \quad 10 \text{ m}^3 = 1 \text{ cm}$
- pentru timp $t \quad 20 \text{ s} = 4 \text{ mm}$

Originea pentru z se ia în $H_g = 20 \text{ m}$, rezultând punctul de funcționare inițial $Q_0 = 1,26 \text{ m}^3 / \text{s}$ (vezi problema 10.1), la care corespunde $V_0 = 1,11 \text{ m/s}$ și $hr_0 = z_0 = 2,30 \text{ mCA}$. Elongația nivelului în rezervorul de echilibru rezultă $\Delta z_{\max} = 4,7 \text{ m}$, cu $z_{\max 1} = 2,3 \text{ m}$ și $z_{\min 1} = -2,4 \text{ m}$. Al doilea maxim este $z_{\max 2} = 1,67 \text{ m}$, iar al doilea minim $z_{\min 2} = -1,33 \text{ m}$. Perioada oscilației rezultă $T = 270 \text{ s}$. Soluția grafică după Schoklitsch corespunde fig. 10.46.

Utilizarea rezervorului de echilibru reduce variațiile de presiune la $H_{\max} - H_{\min} = 4,70 \text{ mCA}$, cu $H_{\max} = 22,30 \text{ mCA}$ și $H_{\min} = 17,6 \text{ mCA}$.

2. Soluția analitică. Această rezolvare se bazează pe soluționarea ecuațiilor (10.153) și (10.154) unde

$$m_c = \frac{2g \cdot A \cdot A_c}{L} \left(M_{cc} + \frac{M_v}{A^2} \right) = \frac{2 \cdot 9,81 \cdot 1,131 \cdot 12,57}{1706} \frac{1,88}{1,131^2} = 0,240$$

$$m_u = \frac{2g \cdot A \cdot A_c}{L} \left(M_{cu} + \frac{M_v}{A^2} \right) = 0,240$$

fiind neglijate pierderile de sarcină. Perioada convențională a oscilațiilor este:

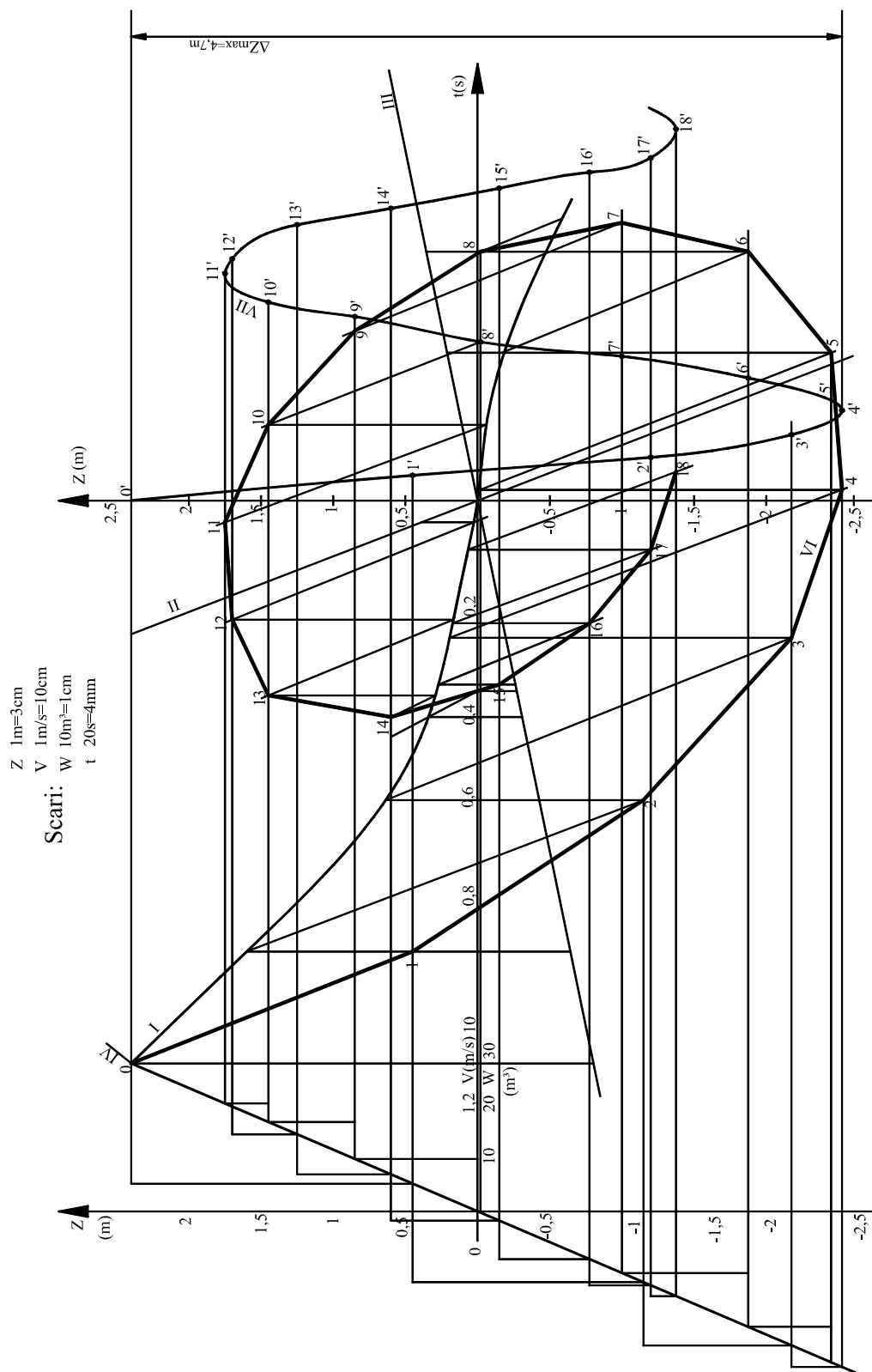


Fig. 10.46. Soluția grafică a oscilațiilor de nivel în rezervorul de echilibru

$$T = 2\pi \frac{\sqrt{\frac{L}{g}} \frac{A_c}{A}}{\sqrt{1 - \frac{M_v^2}{4} \frac{gA_c}{LA}}} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{1706}{9,81} \frac{12,57}{1,131}}}{\sqrt{1 - \frac{1,88^2}{4} \frac{9,81 \cdot 12,57}{1706 \cdot 1,131}}} = 285 s$$

Pentru o bună vizualizare și înțelegere, ecuațiile (10.153) și (10.154) se rezolvă grafic (fig. 10.47) (nu prin metoda numerică), construind curbele

$$F_1(z) = \frac{e^{m_c z}}{1 + m_c z} = \frac{e^{0,24z}}{1 + 0,24z}$$

$$F_2(z) = \frac{e^{-m_u z}}{1 - m_u z} = \frac{e^{-0,24z}}{1 - 0,24z}$$

și

$$F(z) = e^{m_c z} = e^{0,24 \cdot z}$$

Nivelul în rezervorul de echilibru la funcționare normală, peste înălțimea geodezică de ridicare, este

$$z_0 = H_0 - H_g = 22,30 - 20,00 = 2,30 \text{ m}$$

Cu $z_0 = 2,3m$, pe curba $e^{0,24z}$ se găsește punctul M_0 , iar pe paralela la axa z , la intersecția cu curba $F_1(z)$, punctele M_1 și M_2 , corespunzătoare elongației z_1 și z_2 . Elongația $z_1 > 0$ este ireală, corespunde unui timp $t < 0$. Punctele M_2 și M_3 se găsesc pe curba $F_2(z)$, punctul M'_2 asigurând continuitatea elongației în punctul 2. Celelalte puncte, respectiv elongația, se obțin asemănător, rezultând $z_1 = 6m$, $z_2 = 3m$, $z_3 = 2m$; $z_4 = 1,5m$ și $z_5 = 1,25m$. Oscilațiile de nivel în rezervor se amortizează în jurul valorii $z=0$ sau $H_g=20mCA$.

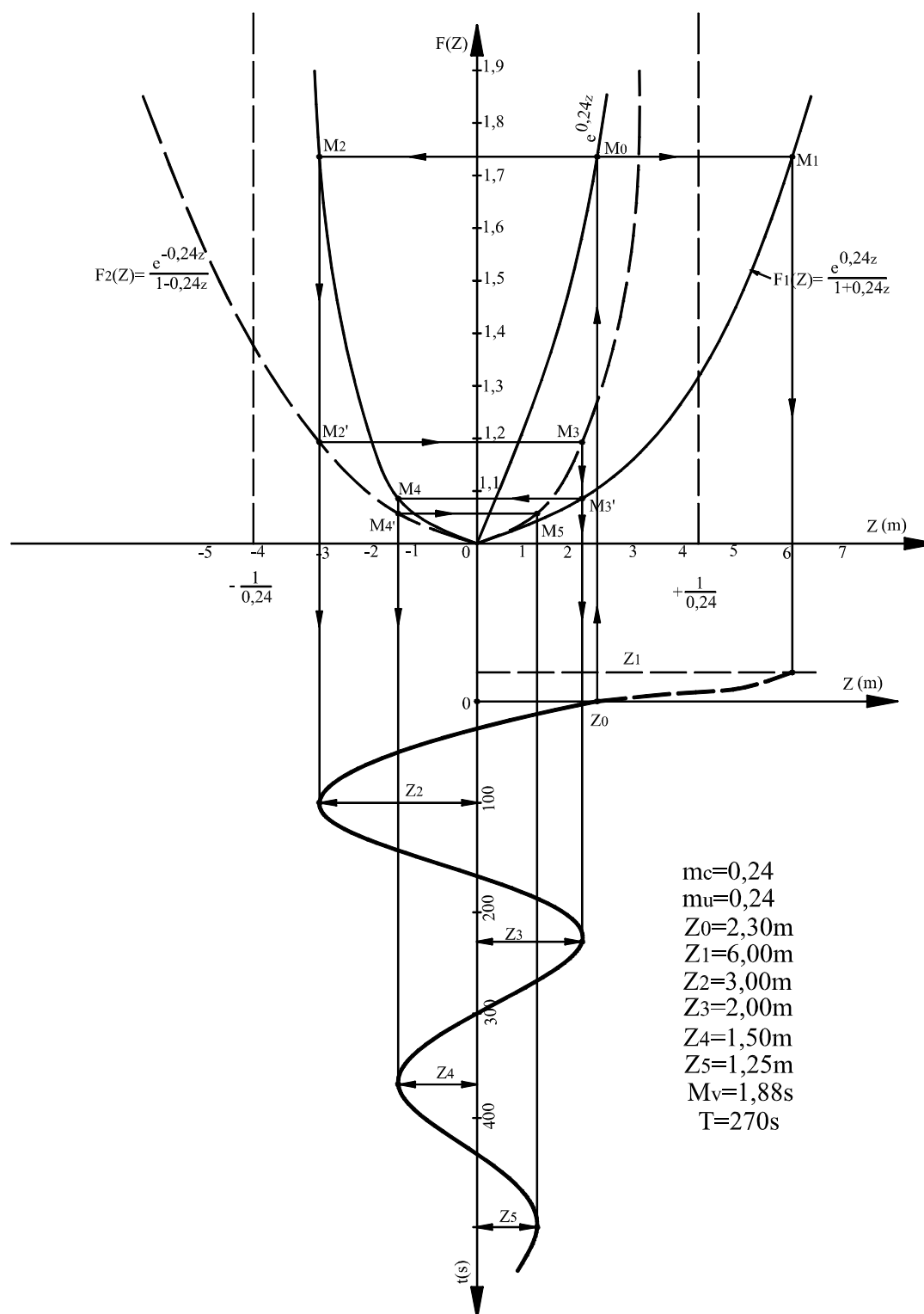


Fig. 10.47. Soluția analitică a oscilațiilor de masă în rezervorul de echilibru