

CAPITOLUL 17

MIȘCAREA NEPERMANENTĂ A LICHIDELOR CU SUPRAFAȚĂ LIBERĂ

17.1. CONSIDERAȚII GENERALE. TIPURI DE UNDE

În albiile naturale și artificiale regimul de curgere se modifică continuu datorită variației în timp a unor condițiilor naturale - infiltrații, precipitații, evaporații, precum și condițiilor de exploatare a albiilor - consumuri de apă, ecluzări, barări etc. Cu excepția precipitațiilor care produc scurgeri importante, condițiile naturale pot fi în general neglijate în analiza regimurilor de curgere în albi. Modul de exploatare al albiilor este cel care determină de fapt regimul de curgere în albi.

Variabilitatea condițiilor naturale și a modului de exploatarea albiilor fac ca regimul de curgere să fie *nepermanent*, respectiv mișcarea apei să fie *variabilă în timp*, fapt ce determină apariția unor unde a căror principală caracteristică este că transportă debit (*unde de translație*).

Regimul de curgere nepermanent se consideră *gradual variat* dacă undele de translație sunt *longitudinale* (mișcarea are loc preponderent pe direcția canalului) și de *adâncime redusă* (întreaga secțiune transversală fiind afectată de deplasarea perturbației). Regimul de curgere nepermanent se consideră *rapid variat* când apar *unde cu front abrupt* (în general la mișcarea bruscă a stavelor, ruperi de baraje etc).

Undele pot fi *directe* (când se propagă spre aval) și *inverse* (când se propagă spre amonte). Dacă o undă determină supraînălțarea nivelului suprafeței libere a apei se numește undă *pozitivă*, iar dacă determină coborârea nivelului suprafeței libere se numește undă *negativă*. Atât undele directe cât și inverse pot fi pozitive sau negative.

În canale se pot întâlni următoarele tipuri de unde (fig. 17.1):

- undă pozitivă directă (*undă de umplere*), apare când debitul crește într-o secțiune amonte (fig. 17.1.a.);
- undă pozitivă inversă (*undă de stăvilire*), apare când debitul se reduce într-o secțiune aval (fig. 17.1.b.);
- undă negativă directă (*undă de flux*), apare când debitul se reduce într-o secțiune amonte (fig. 17.1.c.);
- undă negativă inversă (*undă de golire*), apare când debitul crește într-o secțiune aval (fig. 17.1.d.).

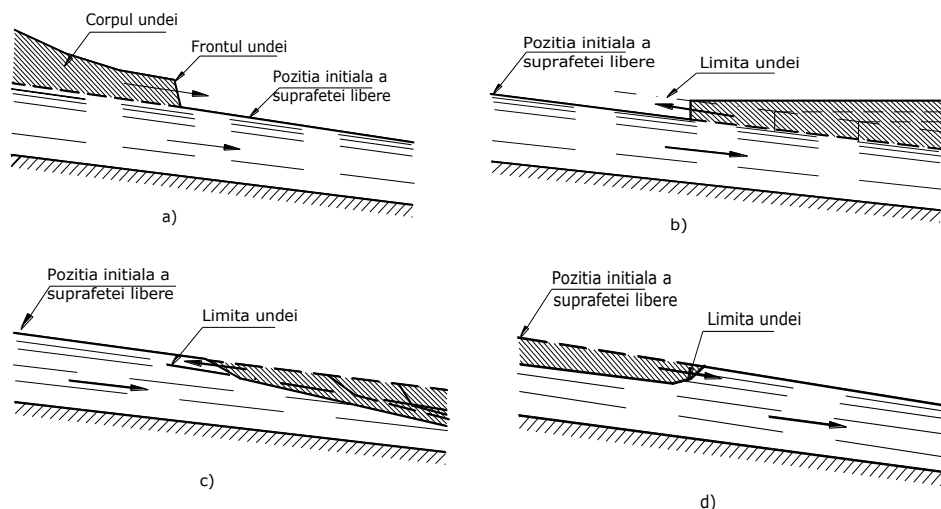


Fig. 17.1. Principalele tipuri de unde în mișcare nepermanentă cu suprafață liberă

17.2. ECUAȚIILE MIȘCĂRII NEPERMANENTE ÎN ALBII

17.2.1. Ipotezele care stau la baza modelului unidimensional

În mișcare nepermanentă viteza apei are componente și în planul secțiunii transversale a albiei, iar pentru modelarea matematică a mișcării nepermanente este necesar să se apeleze la schematizări simplificate, care să încorporeze doar aspectele cu influență esențială asupra proceselor reale și, de multe ori să se ignore cele de importanță secundară.

După ce se stabilesc ecuațiile ce modelează procesul fizic în aspectele lui principale, tratarea lor matematică sau numerică nu alterează natura fizică a procesului analizat dacă tratarea respectivă este executată corect.

De obicei se realizează o schematizare unidimensională, astfel încât curgerea nepermanentă în albie este descrisă prin evoluția în timp, în orice secțiune transversală, a două variabile dependente și anume: cota suprafeței libere a apei y (sau adâncimea apei h) și debitul Q (sau viteza medie în secțiune V). Aceste variabile dependente definesc starea mișcării în raport cu două variabile independente: poziția spațială în lungul albiei x (față de o origine aleasă convenabil) și timpul t (față de momentul apariției perturbației).

Așadar sunt necesare două ecuații care să lege între ele variabilele dependente și independente care apar în curgerea nepermanentă în albie. Aceste

două ecuații provin din legile de conservare ale masei, cantității de mișcare și energiei mecanice.

Ipotezele care stau la baza modelului unidimensional, împreună cu ecuațiile ce descriu mișcarea unidimensională nepermanentă au fost formulate de Barré de Saint-Venant la 1871 la Academia Franceză în lucrarea: “*Théorie et equations generales du mouvement non-permanent des eaux courantes*”, și sunt:

- curgerea este unidimensională cu viteză uniformă în secțiune transversală și suprafață liberă orizontală în direcția transversală;
- curbura liniilor de curent este redusă și accelerațiile după verticală, neglijabile, astfel încât distribuția de presiune în secțiune transversală este hidrostatică;
- efectele turbulenței și a frecărilor cu patul albiei sunt descrise de relațiile identice cu cele din mișcarea permanentă;
- panta medie a canalului în lungul curentului este suficient de redusă, astfel încât se poate aproxima $\cos \alpha$ cu orizontala și $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx S_0$;
- forma secțiunii transversale a canalului se admite arbitrară și variabilă în lungul albiei, dar cu variații lente care să nu afecteze puternic curbura liniilor de curent;

În literatura de specialitate ecuațiile mișcării nepermanente în alpii deschise sunt denumite ecuațiile Saint-Venant. Pentru analiza mișcării apei în canale se pot utiliza mai multe forme ale ecuațiilor Saint-Venant, care, față de forma lor inițială, au suferit în timp generalizări și îmbunătățiri.

17.2.2. Forma integrală a ecuațiilor Saint-Venant

Pentru deducerea formei integrale a ecuațiilor Saint-Venant se consideră (fig. 17.2.) un volum de control în domeniul (x, t) delimitat de două secțiuni transversale (plasate la pozițiile $x = x_1$ și $x = x_2$ în lungul curentului) și încadrat între două momente consecutive de timp ($t = t_1$ și respectiv $t = t_2$).

După Cunge, forma integrală a *ecuației de continuitate* (conservarea masei) derivă din următorul enunț: *cantitatea netă de masă intrată în volumul de control în intervalul $(t_1 \div t_2)$ trebuie să fie egală cu masa volumului acumulat în volumul de control în același interval.*

Egalând cantitatea de masă intrată cu masa volumului de control în intervalul $(t_1 \div t_2)$, rezultă forma integrală a ecuației de continuitate pentru un fluid incompresibil:

$$\int_{x_1}^{x_2} (A_{t_2} - A_{t_1}) \cdot dx = \int_{t_1}^{t_2} (Q_{x_1} - Q_{x_2}) \cdot dt \quad (17.1)$$

în care V este viteza considerată uniformă în secțiune transversală, iar A - aria secțiunii vii. V și A sunt funcții de x și t , astfel încât debitul va fi:

$$Q = A \cdot V = Q(x, t) \quad (17.2)$$

Relația (17.1) reprezintă *forma integrală a ecuației de continuitate*.

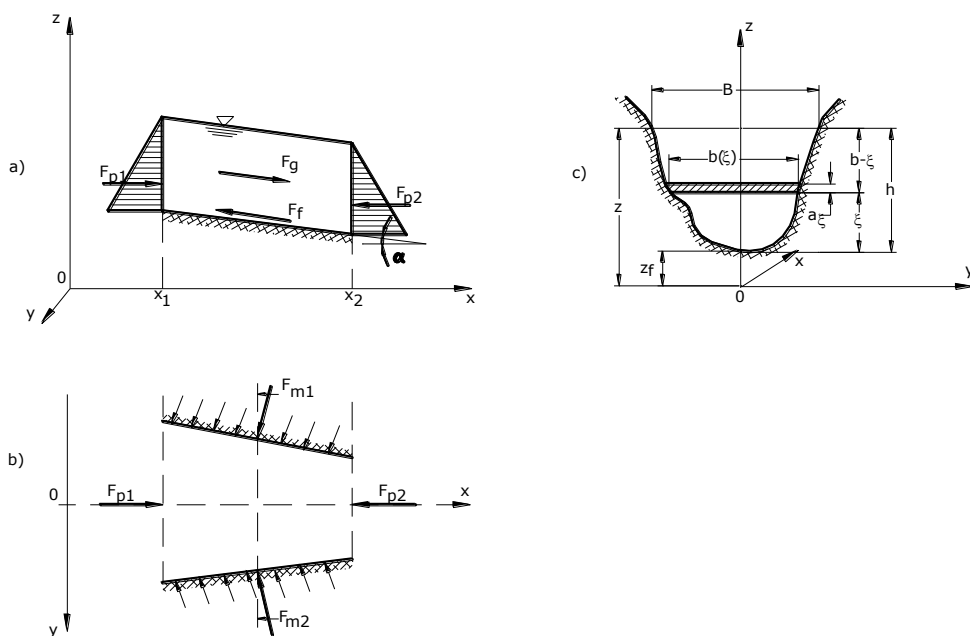


Fig. 17.2. Schemă pentru deducerea ecuațiilor mișcării nepermanente

Notațiile din fig. 17.2. au următoarele semnificații: F_p – forțe de presiune exercitate în secțiunile transversale x_1 și x_2 , F_m – forțe de presiune datorate neuniformității secțiunii transversale în lungul albiei, F_g – componenta greutatei proprii a masei de apă din volum, orientată după axa x , F_f – forțe de rezistență datorate vâscozității și frecărilor la patul albiei, z_f – cota fundului albiei față de un plan de referință, z – cota suprafeței libere a apei în canal, h – adâncimea apei în albie, B – lățimea la luciul apei, ξ – adâncime oarecare a apei, $d\xi$ – creșterea infinitezimală a adâncimii apei, $b(\xi)$ – lățimea albiei la adâncimea ξ .

Definind cantitatea de mișcare ca produsul dintre masă și viteză, iar fluxul (sau debitul) de cantitate de mișcare ca produsul dintre debitul masic (ρVA) și viteza V , forma integrală a *ecuației de conservare a cantității de mișcare* derivă din următorul enunț: *modificarea cantității de mișcare din volumul de control în intervalul ($t_1 \rightarrow t_2$) trebuie să fie egală cu fluxul net de cantitate de mișcare intrat în volumul de control pe același interval, plus integrala forțelor exterioare ce acționează asupra volumului de control, pe intervalul ($t_1 \rightarrow t_2$).*

Plecând de la acest enunț se obține *forma integrală a ecuației de conservare a cantității de mișcare* (17.3):

$$\int_{x_1}^{x_2} (Q_{t_2} - Q_{t_1}) \cdot dx = \int_{t_1}^{t_2} [(Q \cdot V)_{x_1} - (Q \cdot V)_{x_2}] dt + g \int_{t_1}^{t_2} [(I_1)_{x_1} - (I_1)_{x_2}] dt - \\ - g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} I_2 \cdot dx \cdot dt + g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} A(S_0 - S_f) \cdot dx \cdot dt \quad (17.3)$$

unde I_1 și I_2 sunt notații și au valorile:

$$I_1 = \int_0^{h(x)} \rho [h(x) - \xi] \cdot b(x, \xi) \cdot d\xi,$$

și

$$I_2 = \int_0^{h(x)} [h(x) - \xi] \left(\frac{\partial b(x, \xi)}{\partial x} \right)_{h=const} \cdot d\xi,$$

unde S_0 reprezintă panta fundului albiei și S_f – panta de frecare.

Ecuațiile (17.1) și (17.3) sunt ecuațiile integrale care guvernează curgerea unidimensională și nepermanentă, în schematizarea presupusă de ipotezele lui Saint-Venant. La deducerea lor s-a impus condiția ca variabilele dependente (Q sau V și h sau y) sau mărimile hidraulice care depind de acestea (A , B , S_f etc.) să fie funcții continue și/sau derivabile și nu s-a limitat volumul de control din domeniul (x, t) la dimensiunile infinitezimale dx și respectiv dt .

Forma integrală a ecuațiilor Saint-Venant este foarte rar utilizată în aplicații practice, deoarece integrarea ecuațiilor în această formă este foarte dificilă. De cele mai multe ori se utilizează forma diferențială a acestor ecuații, mult mai ușor de aplicat practic. În paragraful următor se prezintă forma diferențială a acestor ecuații.

17.2.3. Forma diferențială a ecuațiilor Saint-Venant

Aceste forme ale ecuațiilor diferențiale se deduc din formele integrale (17.1) și (17.3) dacă se admite că variabilele dependente și mărimile influențate de ele sunt funcții continue și derivabile în raport cu variabilele independente x și t .

Prin dezvoltări în jurul valorilor de la momentul inițial t_I , sau respectiv din secțiunea amonte x_I și reținând doar primii doi termeni ai acestor dezvoltări, prin prelucrări ulterioare, formele diferențiale ale ecuațiilor Saint-Venant, (după R. Popa), devin:

- pentru ecuația de continuitate:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0; \quad (17.4)$$

- pentru ecuația de conservare a cantității de mișcare (dinamică):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(Q \cdot V)}{\partial x} + g \cdot A \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x} - S_0 \right) + g \cdot A \cdot S_f = 0 \quad (17.5)$$

unde semnificația termenilor de mai sus este aceeași ca și pentru forma integrală.

Formele diferențiale ale ecuațiilor Saint-Venant pot fi scrise și în forme echivalente pentru alte perechi de variabile, prin simple transformări matematice, plecând de la relațiile (17.4) și (17.5). Astfel:

- variabile dependente sunt debitul $Q(x,t)$ și adâncimea apei $h(x,t)$;

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (17.6)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + g \cdot A \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) + g \cdot A \cdot (S_f - S_0) = 0 \quad (17.7)$$

- variabile dependente sunt debitul $Q(x,t)$ și cota suprafeței libere a apei $y(x,t)$;

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (17.8)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + g \cdot A \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) + g \cdot A \cdot S_f = 0 \quad (17.9)$$

- variabile dependente sunt viteza $V(x,t)$ și adâncimea apei $h(x,t)$;

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{A}{B} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + V \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{V}{B} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_{h=const} = 0 \quad (17.10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + g \cdot (S_f - S_0) = 0 \quad (17.11)$$

- variabile dependente sunt viteza $V(x,t)$ și cota suprafeței libere a apei $y(x,t)$

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{A}{B} \frac{\partial V}{\partial x} + V \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x} + S_0 \right) + \frac{V}{B} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_{h=\text{const}} = 0 \quad (17.12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} + g \cdot S_f = 0 \quad (17.13)$$

Perechile de ecuații de la (17.6) la (17.13) sunt echivalente doar în cazul mișcărilor nepermanente gradual variabile și dacă variabilele dependente și mărimile ce depind de aceste variabile sunt funcții continue și cel puțin o dată derivabile în raport cu variabilele independente x și t . Alegerea uneia sau altei forme este în funcție de problema ce trebuie rezolvată.

17.2.4. Forme generalizate ale ecuațiilor Saint-Venant

În practica hidrotehnică sunt multe situații de curgeri care nu satisfac în totalitate ipotezele ce stau la baza modelului unidimensional în baza căruia au fost deduse ecuațiile Saint-Venant. Acest lucru se datorează faptului că albiile naturale nu au o rugozitate constantă în secțiune transversală, viteza nu este constantă în secțiune transversală, frecările cu patul albiei minore și majore au valori diferite, curbura și panta patului albiei pot prezenta variații bruște. Din acest motiv s-a încercat adaptarea acestor ecuații astfel încât să se poată modela cât mai fidel procesele respective.

Dacă albia nu are rugozitate constantă în secțiune transversală (ce conduce la viteză neuniformă în secțiune transversală), ecuația de conservare a cantității de mișcare trebuie corectată cu coeficientul lui Boussinesq, astfel:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta_B \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial z}{\partial x} + gAS_f = 0 \quad (17.14)$$

unde debitul Q este produsul dintre viteza medie pe secțiune și aria acesteia, iar β_B este coeficientul Boussinesq:

$$\beta_B = \frac{\int_B v_y^2 \cdot h_y \cdot dy}{V^2 A} \quad (17.15)$$

unde s-a folosit V pentru viteza medie în secțiune ($Q = V \cdot A$), iar v_y și h_y reprezintă viteza medie pe verticală și, respectiv, adâncimea la distanță transversală y față de malul de referință.

În cazul existenței unui aport lateral de debit, notând cu q debitul lateral afluent pe unitatea de lungime de albie (exprimat în m^2/s), ecuația dinamică devine:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta_B \frac{Q^2}{A} \right) + gA \left(\frac{\partial z}{\partial x} + S_f \right) - gA \cdot D - V \cdot q = 0 \quad (17.16)$$

unde D are expresii diferite, în funcție de natura debitului lateral.

La albiei de lățimi mari, trebuie ținut cont de forțele de rezistență exercitate pe suprafața apei de către vânt, care pot să aibă o pondere însemnată în bilanțul cantității de mișcare. Efectul vântului a fost introdus printr-un nou termen în ecuația dinamică sub forma:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta_B \frac{Q^2}{A} \right) + gA \left(\frac{\partial z}{\partial x} + S_f \right) - gAD - Vq - \xi \cdot BW^2 \cdot \cos \alpha_w = 0 \quad (17.17)$$

unde W este viteza vântului, al cărei vector face unghiul α_w cu sensul pozitiv al axei Ox , iar ξ este coeficientul adimensional de rezistență datorat vântului.

Aportul lateral de debit determină modificarea ecuației de continuitate, iar aceasta trebuie completată cu un nou termen astfel:

$$B \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} - q = 0 \quad (17.18)$$

Ecuațiile (17.17) și (17.18) au fost obținute pe baza altor ipoteze decât cele în care au fost obținute perechile de ecuații de la (17.6) la (17.13) și nu sunt echivalente.

Termenii sau coeficienții care apar în ecuațiile Saint-Venant pot fi precizați astfel:

Panta de frecare S_f , se poate calcula ca pentru mișcarea uniformă, sub forma:

$$S_f = \frac{V^2}{C^2 R} = \frac{Q^2}{C^2 A^2 R} = \frac{Q^2}{K^2}, \quad (17.19)$$

în care C este coeficientul Chézy, R - raza hidraulică, K - modulul de debit (debitanța), iar V - viteza medie în secțiune transversală.

Coeficientul Chézy poate fi exprimat, fie prin intermediul coeficientului Strickler - K_s , fie cu ajutorul coeficientului de rugozitate Manning - n , astfel încât modulul de debit va fi:

$$K = K_s \cdot AR^{2/3} \quad \text{sau} \quad K = \frac{1}{n} AR^{2/3} \quad (17.20)$$

și $K=K(h)$ sau $K=K(z)$.

Pentru o albie cu rugozitate neuniformă în secțiune transversală, problema coeficientului Chézy se tratează ca pentru cazul mișcării uniforme.

Termenul S_f va apare în ecuația dinamică sub forma:

$$S_f = \frac{Q|Q|}{K^2}, \quad (17.21)$$

Pierderile prin frecare sunt cuantificate cu semnul adecvat, în funcție de sensul curgerii pe albie la un moment dat. Deci, dacă se folosește formula Manning pentru coeficientul Chézy, ecuația (17.17) se va scrie:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta_B \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial z}{\partial x} + gA \frac{n^2 Q|Q|}{A^2 R^{4/3}} - gAD - Vq - \xi \cdot BW^2 \cdot \cos \alpha_w = 0 \quad (17.22)$$

Problema afluenților se poate trata diferit funcție de mărimea acestora comparativ cu albia principală. Pentru un afluent cu debit mic, aportul lateral se poate introduce sub forma unui debit distribuit $q = Q_a/\Delta x$, unde Q_a este debitul afluentului, iar Δx , este un segment de albie de lungime redusă din jurul confluenței. Pentru un afluent de dimensiuni apreciabile, analiza regimului nepermanent pe cursul inferior al afluentului, se poate trata ca o problemă de mișcare nepermanentă pentru un sistem de alpii interconectate.

Coeficientul de rezistență datorat vântului ξ se exprimă în funcție de densitatea apei ρ , densitatea aerului ρ_a și un coeficient de frecare la suprafață c_R , prin relația:

$$\xi = c_R \cdot \frac{\rho_a}{\rho} \quad (17.23)$$

Dificultatea constă în evaluarea corectă a coeficientului de frecare c_R care, conform experiențelor, depinde nu numai de adâncimea apei, ci și de înălțimea și celeritatea undelor de suprafață (valuri) create de vânt. Valorile reprezentative ale lui se plasează în domeniul $c_R = (1,5 \div 2,6)10^{-3}$, pentru vânturi de la slabe spre puternice.

17.2.5. Forme simplificate ale ecuațiilor Saint-Venant

De multe ori este posibil să se obțină forme simplificate ale ecuațiilor de curgere, forme adecvate pentru modelarea mai multor situații fizice întâlnite în practica hidrotehnică. Dacă problemele analizate admit simplificări, se poate reduce efortul pentru analiza comportamentului sistemului analizat - în raport cu factorii esențiali care îl influențează.

Ecuația dinamică (17.11) se poate scrie sub forma:

$$S_f = S_0 - \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{I}{g} \frac{\partial V}{\partial t} \quad (17.24)$$

și neglijând ultimul termen din membrul drept se obține ecuația dinamică valabilă în mișcarea permanentă și neuniformă, adică:

$$S_f = S_0 - \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} \quad (17.25)$$

Renunțând și la ultimii doi termeni din membrul drept al ecuației (17.25) se obține:

$$S_f = S_0, \quad (17.26)$$

Această ecuație este valabilă în *mișcarea permanentă și uniformă*, la care panta liniei energiei, panta suprafeței libere și panta fundului sunt egale între ele. Ecuația debitului devine:

$$Q = K\sqrt{S_f} = K\sqrt{S_0} \quad (10.27)$$

adică ecuația mișcării permanente și uniforme.

Un alt mod de abordare a simplificării ecuațiilor Saint-Venant se bazează pe analiza ordinului de mărime al termenilor din ecuația dinamică. Fiecare termen din ecuația (17.13) scrisă sub forma:

$$\frac{I}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} + S_f = 0, \text{ reprezintă o pantă, și anume:}$$

$$* \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} \text{ reprezintă panta liniei energiei datorată variației vitezei în}$$

timp (acceleerației);

$$* \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2g} \right) \text{ reprezintă panta datorată sarcinii cinetice în}$$

spațiu, din mișcarea permanentă;

$$* \frac{\partial z}{\partial x} \text{ reprezintă panta suprafeței libere;}$$

* S_f reprezintă panta de frecare, datorată rezistenței la curgere opusă de frecările vâscoase și la maluri.

Primii doi termeni sunt termeni inerțiali (sau pante de accelerare) și există situații de curgere nepermanentă pe albie naturale, în care ponderea lor este neglijabilă.

Astfel renunțând la diverși termeni din ecuația dinamică se obțin modele simplificate.

Modelele rezultate din ecuația dinamică (17.7) în variabile dependente Q și h , prin renunțarea la unii termeni sunt prezentate mai jos:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + g \cdot A \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) + g \cdot A \cdot (S_f - S_0) = 0$$

Modelul undei cinematice

Modelul undei de difuzie fără inerție

Modelul undei de difuzie cu inerție convectivă

Modelul dinamic complet

Modelul undei cinematice se obține prin neglijarea termenilor inerțiali și de presiune și este utilizat mai ales în analize hidrologice.

Modelul undei de difuzie este o ecuație cu derivate parțiale de tip parabolic, și poate constitui o aproximație bună pentru analiza remuurilor în albie barate de diverse construcții.

17.2.6. Forme liniarizate ale ecuațiilor Saint-Venant

Ecuațiile mișcării nepermanente în albie în formele date de la (17.6) la (17.13) sunt sisteme de ecuații diferențiale de ordinul doi de tip hiperbolic, care pentru rezolvare pot fi transformate în ecuații liniare de ordinul doi cu coeficienți constanți. Metoda de liniarizare a acestor ecuații este bazată pe teoria oscilațiilor de mică amplitudine, care pornește de la ipoteza că toate elementele hidraulice ale mișcării oscilatorii sunt mici și că, în consecință, pătratele acestor mărimi și produsele lor sunt neglijabile, fiind înfinți mici de ordin superior, în raport cu mărimile care conțin factor o mărime perturbăție.

Liniarizarea ecuațiilor mișcării, permite găsirea unor soluții generale utilizând metode analitice de calcul.

Plecând de la forma ecuațiilor Saint-Venant în variabile Q și y , notând cu indice zero toate mărimile de referință ce caracterizează regimul permanent, respectiv Q_0 , h_0 , A_0 , V_0 , K_0 și cu litere mici mărimile numite perturbății, q , ζ , a , v , k , la un moment dat, t , ca urmarea a variației consumului sau a perturbăției induse artificial, mărimile corespunzătoare vor fi Q , h , A , V , K :

$$Q = Q_0 + q - \text{debitul scurs,}$$

$$h = h_0 + \zeta - \text{adâncimea curentului,}$$

$$A = A_0 + a - \text{aria secțiunii de scurgere,}$$

$V = V_0 + v$ – viteza curentului,

$K = K_0 + k$ – modulul de debit.

Problema a fost tratată diferit funcție de cum este orientată axa x față de sensul curgerii.

1⁰. Când axa x este orientată în sensul curgerii

În condițiile stării de mișcare permanentă, ecuațiile mișcării în coordonate Q și Y au expresia:

$$\begin{cases} \frac{\partial Y_0}{\partial s} + \frac{V_0}{g} \cdot \frac{\partial V_0}{\partial s} + \frac{Q_0^2}{K_0^2} = 0 \\ Q_0 = \text{const} \end{cases} \quad (17.26)$$

În condițiile producerii perturbațiilor, ecuațiile Saint-Venant pot fi scrise sub forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial Y_0}{\partial s} + \frac{\partial \zeta}{\partial s} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{(V_0 + v)}{g} \cdot \frac{\partial (V_0 + v)}{\partial s} + \frac{(Q_0 + q)^2}{(K_0 + k)^2} = 0 \\ \frac{\partial (A_0 + a)}{\partial t} + \frac{(Q_0 + q)^2}{\partial s} = 0 \end{cases} \quad (17.27)$$

Stabilind expresiile derivatelor ce intră în ecuația (17.27) și eliminând variabila v , ecuațiile liniarizate devin:

- ecuația de continuitate:

$$B_0 \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0 \quad (17.28)$$

Ecuația dinamică:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \cdot (c^2 - V_0^2) \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2} + 2 \cdot V_0 \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial s \cdot \partial t} + \beta \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \alpha \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial s} = 0 \quad (17.29)$$

în care:

$$c^2 = g \cdot \frac{A_0}{B_0} \cong g \cdot h_0 \quad (17.30)$$

unde c (m/s) este celeritatea,

$$\alpha = J_0 \cdot \frac{c^2 \cdot \chi}{h_0} \quad \text{și} \quad \beta = J_0 \cdot \frac{2 \cdot g}{V_0}, \quad (17.31)$$

cu dimensiunile: α (m/s²) și β (1/s), iar χ este exponentul hidraulic al albiei.

2⁰. Când axa x este orientată în sensul contrar curgerii

Adoptând un nou sistem de referință în care axa x este orientată în sens invers curgerii și schimbând semnul pantei hidraulice $J_0 = -J_0$, precum și a vitezei în mișcare permanentă $V_0 = -V_0$, folosind aceleași notații pentru c^2 , α și β , ecuația dinamicii devine:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \cdot (c^2 - V_0^2) \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2} - 2 \cdot V_0 \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial s \cdot \partial t} + \beta \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \alpha \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial s} = 0 \quad (17.32)$$

În ecuația de continuitate nu apar modificări, astfel încât ea rămâne în forma (17.28).

17.3. METODE DE INTEGRARE ALE ECUAȚIILOR SAINT-VENANT

Ecuatiile Saint-Venant sunt în fapt un sistem de ecuații cu derivate parțiale de ordinul 2, neliniare, de tip hiperbolic.

Soluționarea pe cale *analitică* a acestor mișcări este foarte complicată, pentru găsirea soluțiilor în probleme ingineresti, însă a fost realizată de cercetători români, aplicând calculul operațional cu transformata Laplace asupra ecuațiilor mișcării sub formă liniarizată (S. Hâncu, Lucica Roșu ș.a). *Metodele analitice* au avantajul că sunt mai expeditiv decât cele numerice și, în plus, oferă mijloacele unei analize calitative, globale, a fenomenelor hidraulice analizate.

Soluționarea pe cale *numerică* a ecuațiilor Saint-Venant presupune găsirea unei serii de valori numerice ale variabilelor dependente V (sau Q) și h (sau y), pe baza cărora se poate construi distribuția lor în timp și spațiu.

Metodele numerice admit ca necunoscute valorile variabilelor dependente, dintr-un număr finit de puncte (*nodurile de rețea*) din domeniul (x, t) de interes. Metodele numerice prezintă avantajul că reproduc mai fidel fenomenul fizic studiat decât metodele analitice (deoarece în aplicarea metodelor numerice nu se fac ipotezele simplificatoare asupra ecuațiilor mișcării așa cum se întâmplă când se aplică metode analitice). Ele au însă dezavantajul că oferă rezultate doar într-un număr limitat de puncte, selectate în raport cu precizia de calcul dorită, spre deosebire de metodele analitice la care soluția cuprinde toate punctele din domeniu.

Ecuatiile cu derivate parțiale se înlocuiesc printr-o serie de ecuații algebrice numite *ecuații de aproximare* (sau *ecuații discretizate*), având ca necunoscute valorile discrete (din nodurile de rețea) ale variabilelor dependente. Ecuatiile de aproximare se pot obține pe două căi matematice

distincte, fie prin metode bazate pe dezvoltări în serii Taylor, fie prin metode bazate pe integrare.

Metodele bazate pe dezvoltări în *serii Taylor* generează așa numite scheme (metode) cu diferențe finite care pot fi de tip explicit sau implicit.

Metodele bazate pe *integrare* includ fie formulări bazate pe metode variaționale, fie formulări bazate pe reziduuri ponderate.

Probleme din hidraulica albiilor deschise se abordează cel mai frecvent prin metode cu diferențe finite (MDF).

Datorită naturii hiperbolice a sistemului de ecuații, se poate aborda problematica ecuațiilor Saint-Venant printr-o metodă specifică numită *metoda caracteristicilor (MC)* – devenită în ultima vreme metodă etalon la care se raportează noile metode de integrare a ecuațiilor mișcării.

Metodele bazate pe scheme în diferențe finite, deși permit calculul parametrilor mișcări (cote și debite) într-un număr finit de puncte din domeniul de interes (x, t) , prezintă avantajul unei relative ușurințe în programare, precum și analiza ecuațiilor mișcării în formă cât mai completă. Schemele de tip implicit sunt cele mai avantajoase pentru aplicații practice deoarece nu sunt supuse criteriului de stabilitate a algoritmului.

Alegerea uneia sau alteia dintre metodele menționate anterior, rămâne la latitudinea utilizatorului în funcție de problema concretă ce trebuie rezolvată, însă trebuie asigurată corectitudinea calculelor și corecta interpretare a rezultatelor.

17.4. NOȚIUNI PRIVIND CARACTERISTICILE. CONDIȚII INIȚIALE ȘI LA LIMITĂ

Ecuațiile Saint-Venant în formele diferențiale de la (17.6) la (17.13) descriu conservarea masei și a cantității de mișcare în termeni cu derivate parțiale ale variabilelor dependente. Determinarea acestor variabile dependente se face de cele mai multe ori pe cale numerică. Dintre metodele de integrare pe cale numerică, metoda caracteristicilor descrie mai bine propagarea în lungul curentului a undelor singulare cu discontinuități, când se menține caracterul lent variabil în timp și spațiu al mișcării.

Se definește ca *perturbație* fie discontinuitatea derivației unei variabile dependente (cum ar fi $\partial h / \partial x$ sau $\partial Q / \partial t$), fie discontinuitatea unor parametri fizici (panta fundului, dimensiuni geometrice, rugozitate etc.) din ecuațiile Saint – Venant.

Orice perturbație apărută la momentul $t = 0$ într-o secțiune $x = x_M$ pe albie, se propagă în timp spre aval și spre amonte după traiectoriile reprezentate prin curbele C^+ și respectiv C^- din planul (x, t) (fig. 17.3). Perturbația respectivă va influența starea mișcării în domeniul (x, t) cuprins între cele două curbe, numit domeniul de influență al punctului M. Pe de altă parte, condițiile curgerii într-un punct $P(x, t)$ din planul (x, t) sunt influențate doar de perturbațiile care apar în domeniul SPD delimitat de axa $0 - x$ și curbele C^+ și C^- ce se intersectează în P (fig. 17.3.b). Orice s-ar întâmpla în afara acestui domeniu de dependență nu afectează starea mișcării din P.

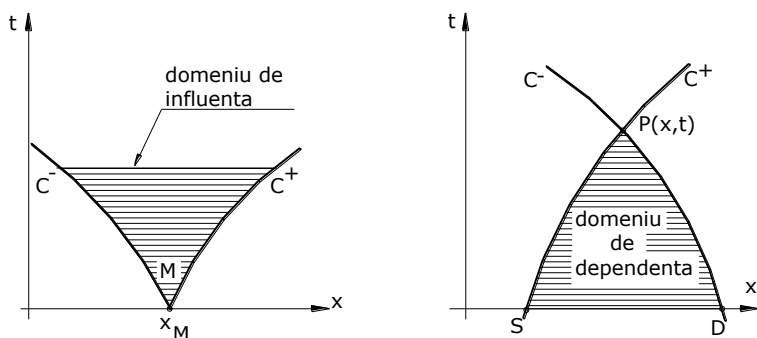


Fig. 17.3. Propagarea perturbației în curgerea pe albie

Dacă perturbația apare ca undă de mică amplitudine într-o curgere cu adâncime redusă, curbele C^+ și C^- după care se propagă aceasta în planul (x, t) se numesc *caracteristici*, iar celeritatea ei este $c = \sqrt{g \frac{A}{B}}$, (cu $A/B = H$, adâncimea hidraulică - egală cu adâncimea pentru albie dreptunghiulară).

Ecuatiile caracteristicilor sunt date de:

$$\frac{dx}{dt} = V \pm \sqrt{g \cdot \frac{A}{B}} \quad (17.33)$$

și acestea sunt corecte în cazul micilor perturbații dar incorecte pentru unde cu front abrupt, la care apare o discontinuitate a variabilei dependente însăși, în speță a adâncimii apei (cazul ruperilor de baraje sau stavile ridicate instantaneu).

Cele trei regimuri de curgere definite în raport cu starea critică, se diferențiază și prin alura caracteristicilor din planul (x, t) , (fig. 17.4).

În regimul lent de mișcare, celeritatea perturbației este mai mare decât viteza medie a curentului ($\sqrt{gA/B} > |V|$), iar starea mișcării din punctul $P(x, t)$ este influențată de condițiile din amonte cât și din cele din aval (fig. 17.4.a).

La curgere critică ($\sqrt{gA/B} = |V|$), una dintre vitezele caracteristice de propagare devine nulă iar caracteristica corespunzătoare - de exemplu C^- - în (fig. 10.4.b) apare ca o dreaptă verticală în planul (x, t) . În acest caz starea din P nu este influențată de condițiile de curgere din aval de la $x > x_P$.

Pentru regimul rapid de mișcare ($\sqrt{gA/B} < |V|$), ambele caracteristici sunt orientate în același sens (spre aval pentru unde directe și spre amonte pentru unde inverse), iar starea lui P nu este influențată de condițiile din aval (curgere în sensul pozitiv al axei $0x$) sau amonte (curgere inversă).

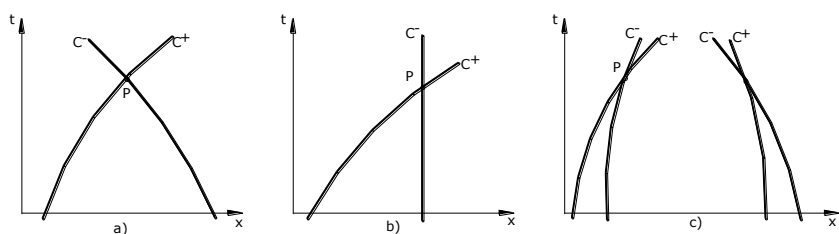


Fig. 17.4. Structura caracteristicilor funcție de regimul de curgere
a). regim lent, b). regim critic, c). regim rapid de mișcare

Pentru integrarea ecuațiilor mișcării trebuie precizate *condițiile inițiale* și la limita domeniului de analiză a curgerii (*condiții la limită sau de contur*).

Mărimile debitelor și adâncimilor apei pe un tronson de albie la momentul ($t = 0$), constituie *condiții inițiale* ale problemei mișcării nepermanente.

În cazul tronsoanelor de albie ce nu sunt delimitate la nici o extremitate de construcții care pot introduce discontinuități în curgere (caz în care pot să nu mai fie respectate ipotezele care au stat la baza deducerii ecuațiilor Saint-Venant), se poate considera mișcare permanentă și uniformă, astfel încât în fiecare secțiune debitele sunt egale cu debitul de la capătul amonte al tronsonului la timpul ($t = 0$), și adâncimile sunt egale cu adâncimea normală.

În cazul în care un tronson este delimitat la o extremitate de construcții care introduc discontinuități în curgere (stavile, praguri, deversoare, ramificații, prize etc), atunci se poate considera pe tronson mișcare permanentă

gradual variată corespunzătoare debitului egal cu debitul prin acele construcții. Prin integrarea ecuației mișcării permanente gradual variate se obțin adâncimile apei în secțiunile de calcul, care, împreună cu debitele, considerate egale cu debitul prin acele construcții în fiecare secțiune, constituie *condițiile inițiale ale problemei* pe tronsonul respectiv.

Condițiile la limită sunt de trei tipuri: $Q = Q(t) - \text{dat}$, sau $h = h(t) - \text{dat}$, sau $Q = Q(h) - \text{dat}$.

Dacă pe albie există diverse construcții, aceasta se împarte în tronsoane astfel încât fiecare tronson să fie delimitat de una dintre extremitățile canalului și/sau de către o construcție. Împărțirea albiei în tronsoane în acest mod este impusă de faptul că debitele de la extremitățile acestora, debitele prin respectivele construcții constituie *condiții limită (sau de contur)* pentru fiecare tronson în parte. Astfel tratarea tronsoanelor poate fi efectuată secvențial – pe aceste tronsoane fiind respectate ipotezele Saint Venant.

Secțiunile cu discontinuități se mai numesc și *joncțiuni interne*, iar relațiile care pot fi scrise într-o astfel de secțiune se numesc și *condiții la limite interne sau condiții de compatibilitate*, și în general sunt date de legea de conservare a masei (ecuația de continuitate) și de legea de conservare a energiei.

În ceea ce privește debitele de la capătul amonte al albiei și ale construcțiilor din canal, valorile acestora de regulă se cunosc sau sunt date tabelar; la un timp curent valorile debitelor pot fi determinate prin interpolare liniară, spline cubică etc.

17.5. SCHEME CU DIFERENȚE FINITE PENTRU INTEGRAREA ECUAȚIILOR SAINT-VENANT

17.5.1. Principiul metodei cu diferențe finite

Principiul metodei cu diferențe finite îl constituie înlocuirea funcțiilor cu variabile continue prin funcții definite de un număr finit de puncte din domeniul de interes. Aceste puncte discrete alcătuiesc rețeaua de calcul, iar funcțiile de argument discret asociate nodurilor de rețea se numesc funcții de rețea. Derivatele parțiale se înlocuiesc prin expresii în diferențe finite, iar ecuațiile cu derivate parțiale se înlocuiesc prin ecuații de aproximare cu diferențe finite de forma unor ecuații algebrice liniare sau neliniare în raport cu funcțiile de rețea.

Schemele cu diferențe finite corespund diverselor maniere prin care derivatele parțiale și termenii nederivativi din ecuațiile originare se exprimă cu ajutorul funcțiilor de rețea.

În categoria schemelor cu diferențe de *tip explicit* intră acelea la care variabilele dependente dintr-un nod de rețea, x_j , la timpul de calcul t_{i+1} , se pot calcula folosind în totalitate datele cunoscute din câteva noduri vecine, de la momentul de timp trecut t_i . În aceste scheme termenii nederivativi și derivatele variabilelor dependente se aproximează astfel încât calculul variabilelor dependente se poate face separat pentru fiecare nod, la momentul t_{i+1} , prin relații explicite.

Pentru asigurarea stabilității soluției trebuie respectat criteriul de stabilitate (Courant – Friedrichs - Lewy):

$$\Delta t \leq \min_j \left(\frac{\Delta x}{|V| + c} \right) \quad (17.34)$$

în care Δt este pasul temporal, Δx – pasul spațial, V – viteza medie iar c – celeritatea.

Datorită acestei restricții alegerea pasului de timp și spațial este limitată, iar răspândirea în aplicații practice este limitată deși au un algoritm simplu și ușor de programat.

În schemele cu diferențe finite de *tip implicit* variabilele curente dintr-un nod de rețea x_j , la timpul curent de calcul t_{i+1} , nu se pot calcula direct, folosind în relațiile datele cunoscute de la momentul t_i , din nodurile vecine. În aceste scheme termenii nederivativi și derivatele variabilelor dependente se aproximează astfel încât variabilelor dependente necunoscute din nodul x_j sunt legate de cele din mai multe noduri vecine (x_{j+1} , sau x_{j-1} și x_{j+1}) și nu pot fi calculate decât simultan pentru toate nodurile spațiale de la momentul t_{i+1} , prin rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice liniare sau neliniare. Dacă ecuațiile de aproximare formează un sistem neliniar în raport cu necunoscutele, rezolvarea acestuia se face iterativ până la atingerea unui criteriu de convergență pe fiecare pas de timp Δt . Deoarece schemele implicite nu sunt supuse restricției de stabilitate ele au cunoscut o largă dezvoltare.

17.5.2. Schemă implicită în patru puncte

În continuare se prezintă o schemă implicită pentru integrarea ecuațiilor Saint-Venant, dedusă pentru albiile prismatice *trapezoidale* și

dreptunghiulare. Pentru rezolvare am ales forma diferențială a ecuațiilor Saint-Venant în variabile dependente Q și y , (17.8) și (17.9).

Ecuația de continuitate fără aport lateral:

$$B \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (17.8)$$

Ecuația dinamică:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + g \cdot A \left(\frac{\partial y}{\partial x} + S_f \right) = 0 \quad (17.9)$$

Ecuațiile de aproximare a sistemului Saint-Venant sunt construite în jurul punctului P într-o celulă de calcul (fig. 17.5.)

Derivatele spațiale ale ecuațiilor Saint-Venant sunt aproximate în punctul P prin:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} \left[\theta \cdot (f_{j+1}^{n+1} - f_j^{n+1}) + (1 - \theta) \cdot (f_j^{n+1} - f_j^n) \right] \quad (17.35)$$

Derivatele temporale ale ecuațiilor Saint-Venant sunt aproximate în punctul P prin:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} \left[\varphi \cdot (f_{j+1}^{n+1} - f_{j+1}^n) + (1 - \varphi) \cdot (f_j^{n+1} - f_j^n) \right] \quad (17.36)$$

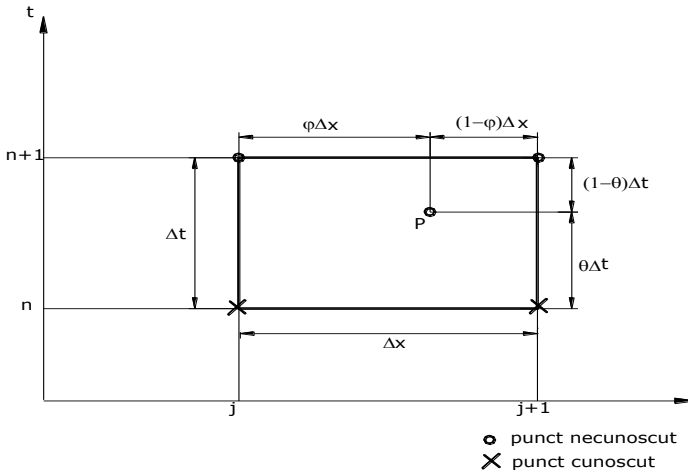


Fig. 17.5. Noduri de rețea folosite în schema implicită în 4 puncte

Termenii nederivativi sunt aproximați în punctul P prin:

$$f = \theta \cdot \left[(\varphi \cdot f_{j+1}^{n+1} + (1 - \varphi) \cdot f_{j+1}^n) \right] + (1 - \theta) \cdot \left[\varphi \cdot f_{j+1}^n + (1 - \varphi) \cdot f_j^n \right] \quad (17.37)$$

unde $f_j^n = f(j \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t)$; θ - coeficient de pondere temporal, φ - coeficient de pondere spațial, Δx – pasul spațial, iar Δt – pasul temporal.

Trebuie menționat că coeficienții de pondere spațiali și temporali au valori cuprinse între 0 și 1. Pentru $\varphi = 0,5$ ecuațiile (17.35) și (17.36) dau schema clasică a lui Preissman din care rezultă: pentru $\theta = 0$ - schema este complet explicită, pentru $\theta = 1$ - schema este complet implicită, iar pentru $\theta = 0,5$ – schema este implicită centrată în 4 puncte. Cunge recomandă o valoare $\theta \geq 0,67$ pentru asigurarea preciziei și stabilității numerice a algoritmului.

Introducerea schemei lui Preissman în ecuațiile (17.8) și (17.9) conduce la ecuațiile algebrice liniare pentru fiecare perechi de puncte adiacente (j și $j+1$).

$$A_1 \cdot \Delta y_{j+1} + B_1 \cdot \Delta y_j + C_1 \cdot \Delta Q_{j+1} + D_1 \cdot \Delta Q_j + G_1 = 0 \quad (17.38)$$

$$A_2 \cdot \Delta y_{j+1} + B_2 \cdot \Delta y_j + C_2 \cdot \Delta Q_{j+1} + D_2 \cdot \Delta Q_j + G_2 = 0 \quad (17.39)$$

unde:

- $\Delta Q_j, \Delta y_j$ - incremenții debitului și cotei de la timpul n la $n + 1$ în punctul j ;

- $\Delta Q_{j+1}, \Delta y_{j+1}$ - incremenții debitului și cotei de la timpul n la $n + 1$ în punctul $j + 1$;

- $A_1, B_1, C_1, D_1, G_1, A_2, B_2, C_2, D_2, G_2$ - coeficienții ce sunt calculați cu valorile cunoscute la timpul n .

Deoarece $A = A(y)$ și $B = B(y)$, variabilele dependente în ecuațiile (17.8) și (17.9) sunt Q și y . Pentru $f = Q$ sau $f = y$, pentru că $f^{n+1} = f^n + \Delta f$, se obține:

$$\begin{cases} Q^{n+1} = Q^n + \Delta Q \\ y^{n+1} = y^n + \Delta y \end{cases}$$

Înlocuind $f^{n+1} = f^n + \Delta f$ în (17.35) și rearanjând ecuația se obține:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} \left[(f_{j+1}^n - f_j^n) - \theta (\Delta f_{j+1} - \Delta f_j) \right] \quad (17.40)$$

Similar se procedează pentru ecuația (17.36):

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} \left[\varphi \cdot \Delta f_{j+1} + (1 - \varphi) \cdot \Delta f_j \right] \quad (17.41)$$

și pentru ecuația (17.37):

$$f = \varphi \cdot f_{j+1} + (1 - \varphi) \cdot f_j \quad (17.42)$$

Pentru o funcție de două variabile $F = F(Q, y)$ discretizarea se poate face astfel:

$$F^{n+1} = F^n + \theta \cdot \Delta F \quad (17.43)$$

$$\Delta F = \varphi \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_{j+1} + (1 - \varphi) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_j + \varphi \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial Q} \right)_{j+1} + (1 - \varphi) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial Q} \right)_j + \dots \quad (17.44)$$

(păstrând doar derivata de ordinul 1)

Utilizând relațiile (17.40) la (17.44) în ecuațiile (17.8) și (17.9) s-au determinat - prin identificare - coeficienții ecuațiilor (17.38) și (17.39). Toți coeficienții sunt determinați pentru secțiunea j și pentru momentul de timp n .

Astfel, aplicarea relațiilor (17.40), (17.41), (17.42) *ecuației de continuitate* (17.8), conduce la:

$$1^0. \quad B \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = \bar{B} \frac{\partial y}{\partial t}, \text{ unde } \bar{B} = \varphi \cdot B_{j+1} + (1 - \varphi) \cdot B_j.$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\varphi}{\Delta t} \cdot \Delta y_{j+1} + \frac{1 - \varphi}{\Delta t} \cdot \Delta y_j$$

$$2^0. \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{I}{\Delta x} \cdot (Q_{j+1} - Q_j) + \frac{\theta}{\Delta x} \cdot (\Delta Q_{j+1} - \Delta Q_j)$$

Prin identificare au rezultat coeficienții ecuației (17.38):

$$A_I = \frac{\varphi}{\Delta t} \cdot \bar{B} \quad (17.45)$$

$$B_I = \frac{1 - \varphi}{\Delta t} \cdot \bar{B} \quad (17.46)$$

$$C_I = + \frac{\theta}{\Delta x} \quad (17.47)$$

$$D_I = - \frac{\theta}{\Delta x} \quad (17.48)$$

$$G_I = \frac{I}{\Delta x} \cdot (Q_{j+1} - Q_j) \quad (17.49)$$

Corectitudinea expresiilor coeficienților ecuației (17.38) s-a verificat dimensional.

$$[A_I] = L \cdot T^{-1}; \quad [B_I] = L \cdot T^{-1}; \quad [C_I] = L^{-1}; \quad [D_I] = L^{-1}; \quad [G_I] = L^2 \cdot T^{-1}.$$

$$[A_l] \cdot [\Delta y_{j+l}] = LT^{-1} \cdot L = L^2 T^{-1};$$

$$[B_l] \cdot [\Delta y_j] = LT^{-1} \cdot L = L^2 T^{-1};$$

$$[C_l] \cdot [\Delta Q_{j+l}] = L^{-1} \cdot L^3 T^{-1} = L^2 T^{-1};$$

$$[D_l] \cdot [\Delta Q_j] = L^{-1} \cdot L^3 T^{-1} = L^2 T^{-1}.$$

Ecuția algebrică liniarizată (17.38) este omogenă dimensional.

Aplicarea relațiilor de la (17.40) la (17.44) *ecuației dinamice* (17.9), conduce la:

$$1^0. \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\varphi}{\Delta t} \cdot \Delta Q_{j+l} + \left(\frac{l-\varphi}{\Delta t} \right) \cdot \Delta Q_j$$

$$2^0. \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) = 2 \cdot \overline{\left(\frac{Q}{A} \right)} \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right) - \left(\frac{Q}{A} \right)^2 \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{l}{\Delta x} \cdot (Q_{j+l} - Q_j) + \frac{\theta}{\Delta x} \cdot (\Delta Q_{j+l} - \Delta Q_j)$$

unde

$$\overline{\left(\frac{Q}{A} \right)} = \varphi \cdot \left(\frac{Q}{A} \right)_{j+l} + (l-\varphi) \cdot \left(\frac{Q}{A} \right)_j,$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) = \frac{l}{\Delta x} \cdot (A_{j+l} - A_j) + \frac{\theta}{\Delta x} \cdot (\Delta A_{j+l} - \Delta A_j) =$$

$$= \frac{l}{\Delta x} \cdot (A_{j+l} - A_j) + \frac{\theta}{\Delta x} \cdot (B_{j+l} \cdot \Delta y_{j+l} - B_j \cdot \Delta y_j);$$

$$\overline{\left(\frac{Q}{A} \right)}^2 = \varphi \cdot \left(\frac{Q}{A} \right)_{j+l}^2 + (l-\varphi) \cdot \left(\frac{Q}{A} \right)_j^2.$$

$$3^0. \quad g \cdot A \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = g \cdot \overline{(A)} \cdot \left[\frac{l}{\Delta x} \cdot (y_{j+l} - y_j) + \frac{\theta}{\Delta x} \cdot (\Delta y_{j+l} - \Delta y_j) \right]$$

$$4^0. \quad g \cdot A \cdot S_f = g \cdot A \cdot S_f + g \cdot A \cdot (\theta \cdot \Delta S_f) + g \cdot S_f \cdot (\theta \cdot \Delta A)$$

$$4^0.1 \quad g \cdot A \cdot S_f = g \cdot \left[\varphi \cdot (A \cdot S_f)_{j+l} + (l-\varphi) \cdot (A \cdot S_f)_j \right].$$

$$\begin{aligned}
 4^0.2. \quad g \cdot A \cdot \theta \cdot (\Delta S_f) &= g \cdot \theta \cdot (\overline{A}) \cdot \left[\varphi \cdot \left(\frac{\partial S_f}{\partial Y} \right)_{j+1} + (1-\varphi) \cdot \left(\frac{\partial S_f}{\partial Y} \right)_j \right] + \varphi \cdot \left(\frac{\partial S_f}{\partial Q} \right)_{j+1} + \\
 &+ (1-\varphi) \cdot \left(\frac{\partial S_f}{\partial Q} \right)_j = g \cdot \theta \cdot (\overline{A}) \cdot [\varphi \cdot \gamma_{j+1} + (1-\varphi) \cdot \gamma_j + \varphi \cdot \omega_{j+1} + (1-\varphi) \cdot \omega_j]
 \end{aligned}$$

unde s-au folosit următoarele notații ajutătoare:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{j+1} &= \left(\frac{\partial S_f}{\partial Y} \right)_{j+1} = \frac{2}{3} \cdot (S_f)_{j+1} \cdot \left[\frac{2 \cdot \sqrt{1+m^2}}{P_{j+1}} - 5 \cdot \left(\frac{B}{A} \right)_{j+1} \right]; \\
 \gamma_j &= \left(\frac{\partial S_f}{\partial Y} \right)_j = \frac{2}{3} \cdot (S_f)_j \cdot \left[\frac{2 \cdot \sqrt{1+m^2}}{P_j} - 5 \cdot \left(\frac{B}{A} \right)_j \right]; \\
 \omega_{j+1} &= \left(\frac{\partial S_f}{\partial Q} \right)_{j+1} = 2 \cdot \frac{|Q_{j+1}|}{K_{j+1}^2}; \\
 \omega_j &= \left(\frac{\partial S_f}{\partial Q} \right)_j = 2 \cdot \frac{|Q_j|}{K_j^2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4^0.3. \quad g \cdot S_f \cdot \theta \cdot (\Delta A) &= g \cdot \theta \cdot (\overline{S_f}) \cdot \left[\varphi \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial Y} \right)_{j+1} + (1-\varphi) \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial Y} \right)_j \right] \\
 &= g \cdot \theta \cdot (\overline{S_f}) \cdot [\varphi \cdot B_{j+1} + (1-\varphi) \cdot B_j]
 \end{aligned}$$

Din $1^0 + 2^0 + 3^0 + 4^0 = 0$, prin identificarea coeficienților, rezultă:

$$A_2 = g \cdot (\overline{A}) \cdot \frac{\theta}{\Delta x} - \left(\frac{Q}{A} \right)^2 \cdot \frac{\theta}{\Delta x} \cdot B_{j+1} + g \cdot \theta \cdot (\overline{A}) \cdot \varphi \cdot \gamma_{j+1} + g \cdot \theta \cdot (\overline{S_f}) \cdot \varphi \cdot B_{j+1} \quad (17.50)$$

$$B_2 = \left(\frac{Q}{A} \right)^2 \cdot \frac{\theta}{\Delta x} \cdot B_j - g \cdot (\overline{A}) \cdot \frac{\theta}{\Delta x} + g \cdot \theta \cdot (\overline{A}) \cdot (1-\varphi) \cdot \gamma_j + g \cdot \theta \cdot (\overline{S_f}) \cdot (1-\varphi) \cdot B_j \quad (17.51)$$

$$C_2 = \frac{\varphi}{\Delta t} + 2 \cdot \left(\frac{Q}{A} \right) \cdot \frac{\theta}{\Delta x} + g \cdot \theta \cdot (\overline{A}) \cdot \varphi \cdot \omega_{j+1} \quad (17.52)$$

$$D_2 = \frac{1-\varphi}{\Delta t} - 2 \cdot \left(\frac{\overline{Q}}{A} \right) \cdot \frac{\theta}{\Delta x} + g \cdot \theta \cdot \overline{(A)} \cdot (1-\varphi) \cdot \omega_j \quad (17.53)$$

$$G_2 = 2 \cdot \left(\frac{\overline{Q}}{A} \right) \cdot \left[\frac{1}{\Delta x} \cdot (Q_{j+1} - Q_j) \right] - \left(\frac{\overline{Q}}{A} \right)^2 \cdot \left[\frac{1}{\Delta x} \cdot (A_{j+1} - A_j) \right] + \\ g \cdot \overline{(A)} \cdot \left[\frac{1}{\Delta x} \cdot (Y_{j+1} - Y_j) \right] + g \cdot \overline{(A \cdot S_f)} \quad (17.54)$$

S-au verificat dimensional coeficienții ecuației (17.39), rezultând.

$$[A_2] = L^2 \cdot T^{-2}; \quad [B_2] = L^2 \cdot T^{-2}; \quad [C_2] = T^{-1}; \quad [D_2] = T^{-1}; \quad [G_2] = L^3 \cdot T^{-2}$$

Înlocuind în (17.39) rezultă:

$$[A_2] \cdot [\Delta y_{j+1}] = L^2 T^{-2} \cdot L = L^3 T^{-2};$$

$$[B_2] \cdot [\Delta y_j] = L^2 T^{-2} \cdot L = L^3 T^{-2};$$

$$[C_2] \cdot [\Delta Q_{j+1}] = T^{-1} \cdot L^3 T^{-1} = L^3 T^{-2};$$

$$[D_2] \cdot [\Delta Q_j] = T^{-1} \cdot L^3 T^{-1} = L^3 T^{-2}.$$

Și ecuația algebrică liniarizată (17.39) este omogenă dimensional.

1⁰. Algoritmul dublului baleiaj

Ecuațiile (17.38) și (17.39) trebuie rezolvate în orice punct de calcul, pentru orice pas de timp Δt în perioada de calcul. Ele formează un sistem de ecuații algebrice liniare și pot fi rezolvate dacă și condițiile la limită sunt de asemenea liniarizate în termenii ΔQ și Δy , prin aplicarea oricărei metode de soluționare.

Algoritmul dublului baleiaj este o aplicare a schemei lui Preissmann și Cunge la ecuațiile (17.38) și (17.39). Prin acest algoritm se calculează valorile debitelor și cotelor în punctul j la momentul de timp $n+1$ utilizând coeficienți flotanti și relații de recurență între aceștia.

Presupunând că există o relație liniară de tipul

$$\Delta Q_j = E_j \Delta y_j + F_j \quad (17.55)$$

se poate determina o relație între Δy_j și incremenții variabilelor dependente Δy și ΔQ pentru punctul $j+1$. Aceasta se demonstrează înlocuind ecuația (17.55) în ecuațiile (17.38) și (17.39) obținându-se:

$$\begin{cases} A_1 \cdot \Delta y_{j+1} + (B_1 + D_1 E_j) \Delta y_j + C_1 \cdot \Delta Q_{j+1} + D_1 \cdot \Delta Q_j + G_1 = 0 \\ A_2 \cdot \Delta y_{j+1} + (B_2 + D_2 E_j) \Delta y_j + C_2 \cdot \Delta Q_{j+1} + D_2 \cdot \Delta Q_j + G_2 = 0 \end{cases} \quad (17.56)$$

Din sistemul de ecuații (17.56) se poate determina o relație între Δy_j și incrementii variabilelor dependente Δy și ΔQ pentru punctul $j+1$.

$$\Delta y_j = -\frac{A_l}{B_l + D_l E_j} \cdot \Delta y_{j+1} - \frac{C_l}{B_l + D_l E_j} \cdot \Delta Q_{j+1} - \frac{G_l + D_l F_j}{B_l + D_l E_j} \quad (17.57)$$

Ecuația (17.57) se poate scrie:

$$\Delta y_j = O_{1j} \cdot \Delta y_{j+1} + O_{2j} \cdot \Delta Q_j + O_{3j} \quad (17.58)$$

unde:

$$\begin{cases} O_{1j} = -\frac{A_l}{B_l + D_l E_j} \\ O_{2j} = -\frac{C_l}{B_l + D_l E_j} \\ O_{3j} = -\frac{G_l + D_l F_j}{B_l + D_l E_j} \end{cases} \quad (17.59)$$

Dacă se elimină Δy_j între ecuațiile (17.57) și exprimând ΔQ_{j+1} ca o funcție de Δy_{j+1} se obține:

$$\begin{aligned} \Delta Q_{j+1} = & -\frac{A_l(B_2 + D_2 E_j) - A_2(B_l + D_l E_j)}{C_l(B_2 + D_2 E_j) - C_2(B_l + D_l E_j)} \cdot \Delta y_{j+1} - \\ & - \frac{(G_l + D_l F_j)(B_2 + D_2 E_j) - (G_2 + D_2 F_j)(B_l + D_l E_j)}{C_l(B_2 + D_2 E_j) - C_2(B_l + D_l E_j)} \end{aligned} \quad (17.60)$$

și

$$\begin{cases} E_{j+1} = \frac{A_2(B_l + D_l E_j) - A_l(B_2 + D_2 E_j)}{C_l(B_2 + D_2 E_j) - C_2(B_l + D_l E_j)} \\ F_{j+1} = \frac{(G_2 + D_2 F_j)(B_l + D_l E_j) - (G_l + D_l F_j)(B_2 + D_2 E_j)}{C_l(B_2 + D_2 E_j) - C_2(B_l + D_l E_j)} \end{cases} \quad (17.61)$$

Așadar există o relație liniară de forma indicată de ecuația (17.55).

Este demonstrat deci că dacă relația (17.55) este corectă pentru orice punct j atunci este corectă pentru oricare din punctele următoare. Mai mult, ecuația (17.55) definește câteva relații de recurență astfel:

$$\begin{aligned} E_{j+1} &= f(E_j, A_l, B_l, \dots); \\ F_{j+1} &= f(E_j, F_j, A_l, B_l, \dots). \end{aligned}$$

Coeficienții E_{j+1} și F_{j+1} se pot calcula pentru orice punct $j+1$ dacă se cunosc coeficienții E_j și F_j , din punctele anterioare j .

A treia relație:

$$\Delta y_j = O_{1j} \cdot \Delta y_{j+1} + O_{2j} \cdot \Delta Q_j + O_{3j} \quad (17.62)$$

având coeficienții determinați cu relația (17.59) permite calculul valorii lui Δy_j când incrementii Δy și ΔQ sunt cunoscuți în punctul $j+1$.

Aceste relații de recurență sugerează o metodă pentru calculul lui y^{n+1} și Q^{n+1} pentru toate punctele $j = 1, 2, \dots, N-1$, N dintr-un canal. Condițiile limită trebuie liniarizate local. Atunci condițiile limită trebuie exprimate în modul următor:

Pentru prima condiție limită, $j = 1$, (la frontiera amonte) este necesară cunoașterea relației $\Delta Q_1 = E_1 \Delta y_1 + F_1$, (altfel spus trebuie cunoscuți coeficienții E_1 și F_1).

Pentru a doua condiție limită, $j = N$, este necesară cunoașterea lui Δy_N .

17.5.3. Schemă explicită de integrare a ecuațiilor Saint-Venant

Această metodă de rezolvare a ecuațiilor Saint-Venant conduce cel mai repede la aflarea soluțiilor ecuațiilor Saint-Venant.

Definiția schematică a unei scheme rectangulare este dată în fig. 17.6: o rețea de noduri cu punctul P, proiectat în planul (xOt) , Δx fiind distanța spațială și Δt - distanța temporală dintre punctele din rețea.

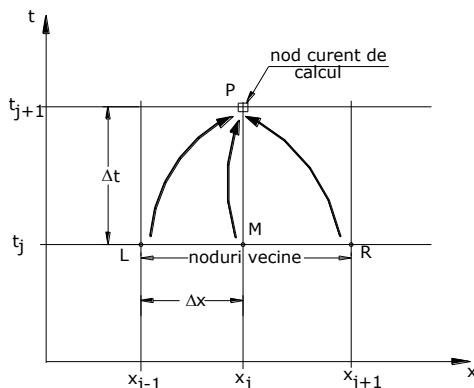


Fig. 17.6. Noduri de rețea folosite în schema explicită de integrare a ecuațiilor Saint-Venant

Condițiile cunoscute, V_L , h_L și V_R , h_R , la timpii $t = t$, sunt utilizate pentru exprimarea explicită a condițiilor necunoscute, V_P , h_P , după un pas Δt ,

adică la timpul $t = t + \Delta t$, unde V reprezintă viteza punctuală considerată constantă în secțiune transversală, iar h este înălțimea apei în canal.

Derivatele parțiale a ecuațiilor Saint-Venant sunt approximate cu ajutorul diferențelor finite astfel:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_M = \frac{V_R - V_L}{2\Delta x} \quad \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_M = \frac{h_R - h_L}{2\Delta x} \quad (17.63)$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_P = \frac{V_P - V_M}{\Delta t} \quad \left. \frac{\partial h}{\partial t} \right|_P = \frac{h_P - h_M}{\Delta t}$$

Pentru un canal prismatic, prin înlocuirea acestor ecuații în ecuația de continuitate, rezultă:

$$h_P = h_M + \frac{\Delta t}{2\Delta x} [V_M(h_L - h_R) + h_M(V_L - V_R)] \quad (17.64)$$

Apoi, prin înlocuirea ecuațiilor de mai sus în ecuația dinamică, rezultă:

$$\frac{V_P - V_M}{\Delta t} + V_M \frac{(V_R - V_L)}{2\Delta x} + g \frac{(h_R - h_L)}{2\Delta x} = g(S_0 - S_e) \quad (17.65)$$

unde S_0 reprezintă panta fundului, iar S_e este panta energetică.

$$J_e = \frac{|V_P|}{R_{h_P}^{4/3}} n^2 \quad \text{și} \quad \Gamma = \frac{R_{h_P}^{4/3}}{n^2} g \Delta t \quad (17.66)$$

unde R_{h_P} reprezintă raza hidraulică în secțiunea corespunzătoare punctului P , iar n - coeficientul lui Manning.

Simplificat, se poate scrie:

$$V_P^2 + \Gamma V_P - \Gamma \beta = 0 \quad (17.67)$$

unde:

$$\beta = \left[V_M + \frac{\Delta t}{2\Delta x} V_M(V_L - V_R) + \frac{g\Delta t}{2\Delta x} (h_L - h_R) + g\Delta t S_0 \right] \quad (17.68)$$

Din această ecuație rezultă:

$$V_P = \frac{I}{2} \left[\Gamma + \left(\Gamma^2 + 4\Gamma\beta \right)^{1/2} \right] \quad (17.69)$$

Metoda explicită prin diferențe finite permite determinarea adâncimii apei, h_P , la un timp fix, Δt , cu ajutorul ecuației de continuitate scrisă anterior, apoi se determină viteza, V_P , în punctul P .

Numărul și tipul condițiilor la limită necesare pentru obținerea unei soluții sunt descrise în partea aplicativă.

Pentru obținerea unei soluții stabile, este necesar întotdeauna să se respecte criteriul de stabilitate al lui Courant

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{(|V| + c)} \quad (17.70)$$

unde: $\Delta t = (t_P - t_R)$ sau $\Delta t = (t_P - t_L)$
 și $\Delta x = (x_P - x_R)$ sau $\Delta x = (x_P - x_L)$.

17.6. UNDE DE TRANSLAȚIE

Așa cum s-a amintit în paragraful 17.1., mișcarea caracterizată printr-o variație bruscă a adâncimii apei (când apar *unde cu front abrupt*), se numește *mișcare nepermanentă rapid variată*, undele fiind numite adeseori în literatura de specialitate – *unde de translație* sau *unde de inundație*. Aceste tipuri de unde apar de obicei la deschiderea bruscă a unor stavile, ecluze, în anumite situații de exploatare a centralelor hidroelectrice, sau în cazul ruperilor de baraje. Tot undă de translație se consideră și fenomenul numit *maskaret*, dat de un flux mareic care înaintează pe un râu de dimensiuni apreciabile (ex. pe fluviul Amazon).

În acest caz, ipotezele care stau la baza modelului unidimensional în baza cărora au fost deduse ecuațiile Saint – Venant nu mai sunt valabile.

Dacă curbura liniilor de curent nu este neglijabilă, mai mult, nu se poate admite o distribuție hidrostatică a presiunii în secțiune transversală, atunci ecuațiile Saint - Venant în forma de la (17.6) la (17.13) nu mai sunt valabile și nici considerațiile anterioare legate de aceste ecuații.

Variația bruscă a suprafeței apei, este determinată de o variație bruscă a debitului ΔQ (fig. 17.7).

Această variație bruscă (*perturbație*) este *unda de inundație*, care formează o discontinuitate Δh , numită *frontul undei*. După perturbație, corpul undei se dezvoltă paralel cu suprafața liberă a apei, debitul corpului undei fiind $Q + \Delta Q$.

Pentru *unda pozitivă directă* (17.7.c) și *unda negativă inversă* (17.7.d), variația de debit este *pozitivă*, $\Delta Q > 0$, iar pentru *unda pozitivă inversă* (17.7.a) și pentru *unda negativă directă* (17.7 b), variația de debit este negativă, $\Delta Q < 0$.

Frontul undei se poate prezenta sub diferite forme. Dacă unda este pozitivă, $h_1 + \Delta h > h_1$, frontul undei poate fi format dintr-o singură undă sau dintr-o succesiune de unde mai mici, separate sau nu, frontul undei este mai

curând concav și rămâne stabil. Dacă unda este negativă, $h_1 + \Delta h < h_1$, frontul va lua forma unei curbe continue, este mai curând convex și devine instabil.

După Chow, acest lucru poate fi explicat considerând unda ca o sumă de unde mai mici plasate una peste alta. Fiecare undă mică se deplasează cu celeritatea $c = \sqrt{gh}$, undele mici de la partea superioară a undei au o celeritate mai mare decât cele de la bază. În consecință, pentru undele pozitive, undele mici de la partea superioară a undei absorb undele mici de la baza undei, rezultând un front de undă mai abrupt. În cazul undelor negative, undele mici de la partea superioară a undei se deplasează mai repede decât cele de la bază, rezultând o undă cu un front din ce în ce mai puțin abrupt.

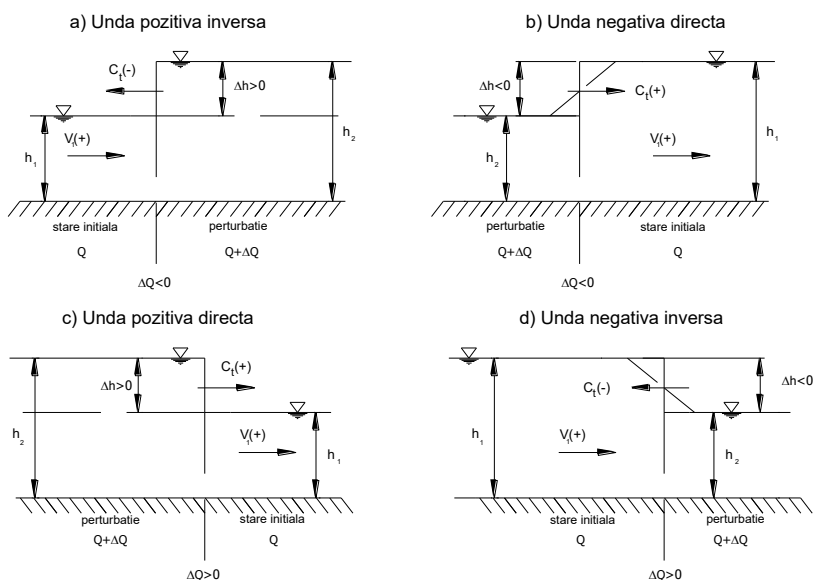


Fig. 17.7. Tipuri de unde de translație

Viteza de propagare a undelor de translație pozitive sau negative - celeritatea, se deduce prin aplicarea ecuației teoremei impulsului între două secțiuni situate de o parte și de alta a frontului undei. Pentru un canal de secțiune dreptunghiulară celeritatea undelor este (fig. 17.7):

$$c_i(\pm) = V_1 \pm \sqrt{gh_1} \cdot \sqrt{\frac{h_2}{2h_1} \left(1 + \frac{h_2}{h_1} \right)} \quad (17.71)$$

Semnul (-) corespunde undelor inverse, iar semnul (+) corespunde undelor directe.

Dacă se neglijează termenii patratici, ec. (17.71) se poate aproxima prin:

$$c \cong V_1 \pm \sqrt{gh_1} \sqrt{1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{\Delta h}{h_1}} \text{ sau } c \cong V_1 \pm \sqrt{gh_1} \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{\Delta h}{h_1} \right) \quad (17.72)$$

Relația (17.72) este valabilă pentru unde de amplitudine nu foarte mică.

Pentru unde de amplitudine foarte mică la care $\frac{h_2 - h_1}{h_1} \ll 1$, sau

$h_2 \cong h_1 \cong h$, ecuația (17.72) devine:

$$c_i(\pm) = V \pm \sqrt{gh} \quad (17.73)$$

Relația (17.73) reprezintă celeritatea unei lungi (undă de gravitație de adâncime redusă) și de amplitudine redusă în ape cu $V = 0$ (v. ec. 17.33)

17.7. VALURI

17.7.1. Definiții. Clasificarea valurilor

Valurile sunt forme pe care le ia suprafața apei sub acțiunea impulsurilor de presiune, datorate vântului, mișcării navelor, seismelor etc. Poziția inițială orizontală a suprafeței apei este modificată de impulsurile de presiune. Forța gravitațională determină valurile obișnuite – *gravitaționale*, iar forțele capilare determină doar mici încrețituri la suprafața apei numite *valuri de capilaritate*. Forța de frecare a vântului cu suprafața apei în repaos produce *valurile de vânt* – *valuri întreținute*, acestea își continuă mișcarea și după încetarea acțiunii vântului și se numesc *valuri libere* sau *hulă*.

Suprapunerea valurilor libere cu cele întreținute determină *valurile mixte* și *valurile de interferență* – date de suprapunerea valurilor reflectate cu cele incidente în zona construcțiilor din apă.

Mareele se datorează forțelor de atracție ale soarelui, și în principal, ale lunii. Ele sunt caracterizate prin *flux* (ridicarea nivelului) și *reflux* (coborârea nivelului). Fluxul are o durată mai mică decât refluxul. La flux, adâncimea apei crește, în consecință crește și celeritatea. Dacă fluxul pătrunde pe albia unui râu care se îngustează spre amonte, unda mareică poate căpăta amplitudine mare (*mascaret*). Există țări în care energia mareică a fost captată pentru producerea de energie hidroelectrică (centrala Rance - Franța).

Valurile de vânt sunt cele mai frecvente; ele formează la viteze ale apei de peste 1 m/s; pentru o viteză a vântului între 0,5 și 1 m/s suprafața liberă

a apei doar se încrețește. Dezvoltarea valurilor este funcție de adâncimea bazinului, lungimea luciului de apă parcursă de val, de intensitatea și durata vântului.

Elementele valului produs de vânt (fig. 17.8) sunt: Δh - înălțimea valului, măsurată pe verticală de la creastă până la partea inferioară; λ - lungimea de undă a valului, distanța pe orizontală între crestele a două valuri învecinate; c - celeritatea, viteza de propagare a crestei valului pe orizontală; τ - perioada valului, timpul necesar pentru parcurgerea de către creasta valului a lungimii de undă λ ; h/λ - curbura valului; v_z - viteza orbitală de mișcare a particulelor la diverse adâncimi; D - fetchul valurilor, lungimea luciului de apă supusă acțiunii vântului.

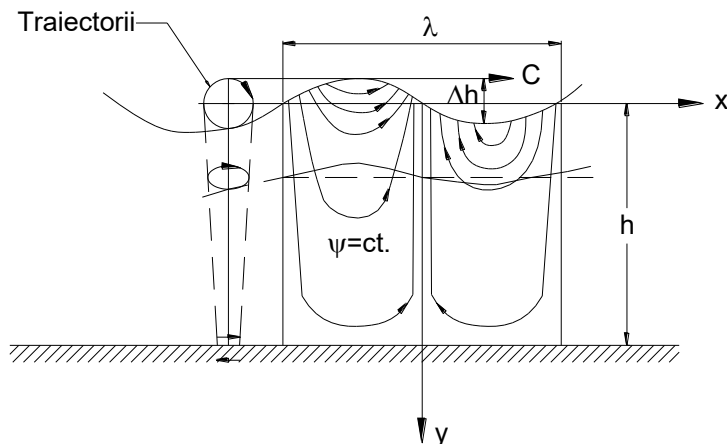


Fig. 17.8. Elementele valului de vânt

17.7.2. Valuri marine. Acțiunea valurilor asupra construcțiilor

După von Gerstner, studiul valurilor marine pleacă de la ipoteza că acestea satisfac riguros condiția de continuitate precum și condiția ca presiunea sa fie constantă pe suprafața liberă a apei.

Astfel:

a. Toate moleculele fluide descriu în planurile secțiunii drepte a valului orbite circulare, miscându-se cu viteză uniformă și în aceeași perioadă de timp. Toate particulele care au centrul orbitei pe aceeași verticală au mișcări sincrone și în concordanță de fază; vitezele sunt dirijate, la vârful orbitelor, în sensul de propagare a valului. Centrele orbitelor se află pe suprafața apei liniștite (inițial imobile).

b. Razele orbitelor descresc repede cu adâncimea y , după legea exponențială $e^{-\frac{2\pi y}{\lambda}}$, λ fiind lungimea de undă

c. Perioada T este dată de relația:

$$T = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}, \quad (17.74)$$

iar celeritatea:

$$c = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}}, \quad (17.75)$$

T și c iau aceleași valori ca pentru ape adânci.

d. Fiecare particulă lichidă este supusă în timpul mișcării la presiunea la care era supusă în poziția de repaus. Suprafețele de nivel sunt generate de curbe corespunzând pozițiilor actuale ale punctelor care se găsesc, în stare de echilibru, în același plan orizontal.

e. Curbele de presiune au forma unei *trohoide circulare* (fig. 17.9), care este curba descrisă de un punct interior unui cerc care se rostogolește pe o dreaptă; raza cercului este $\frac{\lambda}{2\pi}$ și punctul care descrie trohoida este la distanța a de centrul său. Când punctul care descrie curba este situat chiar pe circumferința de rază a_0 , trohoida este o *cicloidă*. Între lungimea valului l și amplitudinea a_0 există relația, $\lambda = 2\pi \cdot a_0$, deci $c_0 = \sqrt{ga_0}$.

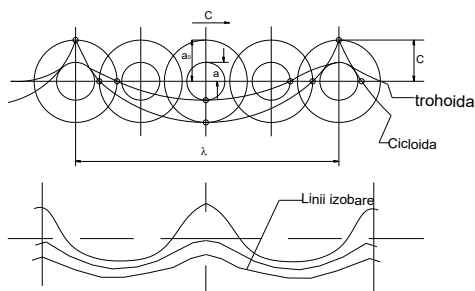


Fig. 17.9. Val marin trohoidal

După Mateescu, o relație mai riguroasă pentru calculul valurilor de amplitudine finită în apă adâncă este:

$$\frac{y}{a} = \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + \frac{\pi a}{\lambda} \cos 4\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + \frac{3\pi^2 a^2}{2\lambda^2} \cos 6\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \quad (17.76)$$

iar celeritatea se exprimă prin:

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \left[1 + \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (17.77)$$

Pentru calculul *energiei valurilor* se pleacă fie de la teoria lui Stokes, fie a lui Gertsner. Energia potențială calculată între două creste consecutive se poate exprima prin:

$$E_p = \frac{\gamma a^2 \lambda}{4}, \quad (17.78)$$

iar energia totală prin:

$$E_t = \frac{\gamma a^2 \lambda}{2} \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{m de val}} \right] \quad (17.79)$$

unde γ reprezintă greutatea specifică a apei.

Relația (17.79) permite evaluarea impactului valurilor asupra construcțiilor hidrotehnice. Efectul dinamic se exercită mai mult la suprafața apei și scade rapid cu adâncimea datorită legii de repartiție a vitezei:

$$u = u_0 e^{-\frac{2\pi y}{\lambda}} \quad (17.80)$$

Dacă se admite faptul că presiunea hidrostatică variază proporțional cu adâncimea, atunci presiunea totală la nivelul oglinzii apei se poate scrie

$$p_t = 2\gamma a \quad (17.81)$$

unde a reprezintă amplitudinea valului deasupra nivelului static (fig. 17.10), care este în funcție de tipul mării sau oceanului (ex. Marea Mediterană $2a \cong 5 \text{ m}$).

Există, deasemenea, formule semiempirice pentru calculul presiunilor suplimentare datorate valurilor atât deasupra nivelului apei liniștite cât și în adâncime.

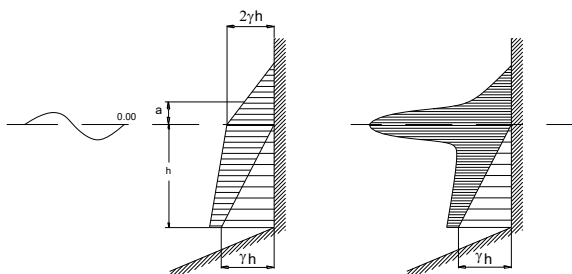


Fig. 17. 10. Presiunea valurilor pe dig

17.8. APLICAȚII

1^o. Să se determine *prin metoda implicită* debitele și cotele apei în trei secțiuni (amonte, mijloc și aval) ale unui canal de secțiune trapezoidală având următoarele caracteristici: lățimea la bază a canalului: $b = 5,0$ m, debitul în mișcare permanentă și uniformă: $q = 3,0$ m³/s, panta longitudinală a canalului: $S_0 = 0,001$, coeficientul unghiular al taluzului: $m = 1,5$, coeficientul de rugozitate după Strikler: $k = 40$ ($n = 0,025$), lungimea canalului: $L = 10$ km, cota fundului canalului în amonte $y_{f1} = 100$ m.

Hidrograful afluent în canal este redat în tab. 17.1. și fig. 17.11, secțiunea $j = 0$, și are următoarele caracteristici: $Q_{min} = 5$ m³/s, $Q_{max} = 7$ m³/s, cu timpul de creștere a debitului $t_u = 3600$ s după o lege liniară.

Rezolvare. S-au impus, pentru determinarea coeficienților ecuațiilor algebrice liniare (17.38) și (17.39), valorile coeficientului de pondere spațial: $\varphi = 0,5$, și al coeficientului de pondere temporal: $\theta = 0,7$.

Pentru algoritmul dublului parcurs de soluționare a ecuațiilor algebrice liniare, condițiile limită furnizează fie valorile coeficienților, E_I , F_I , fie valorile incrementului Δy_N .

Condiția *limită în amonte* s-au ales de forma:

$$Q = Q(t) \text{ dat (tab. 17.1. și fig. 17.11; secțiunea } j = 0)$$

Se poate determina E_I și F_I astfel încât $\Delta Q_I = Q(t^n + \Delta t) - Q_1^n$.

Din ecuația (17.55) ΔQ_I depinde de Δy_I , dar poate fi independent de Δy_I utilizând o condiție limită arbitrară. Impunând:

$$E_I = 0 \text{ rezultă } F_I = Q(t^n + \Delta t) - Q_1^n.$$

Deci oricare ar fi valoare calculată Δy_I , ΔQ_I va fi întotdeauna egală cu valoarea condiției limită.

Condiția *limită în aval* s-au ales astfel ca în aval să fie un nivel impus (în cazul de față am impus nivel corespunzător regimului de mișcare permanentă și uniformă). Așadar:

$$Q_N = k A_N (R^{2/3})$$

$$\Delta Q_N = Q \cdot \left[\frac{5}{3} \cdot \left(\frac{B}{A} \right)_N - \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{I+m^2}}{P_N} \right] \cdot \Delta y_N$$

În același timp va exista o relație de tipul:

$$\Delta Q_N = E_N \Delta y_N + F_N$$

și ΔQ_N și Δy_N se determină prin rezolvarea sistemului:

$$\begin{bmatrix} 1 & -Q \cdot \left[\frac{5}{3} \cdot \left(\frac{B}{A} \right)_N - \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{I+m^2}}{P_N} \right] \\ 1 & -E_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta Q_N \\ \Delta y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_N \end{bmatrix}$$

Pentru canalul de secțiune trapezoidală parametrii ce intervin în ecuațiile liniarizate au expresiile:

$$B_j = b_j + 2 \cdot m \cdot (y_j - y_{ff});$$

$$A_j = (y_j - y_{ff}) \cdot [b + m \cdot (y_j - y_{ff})];$$

$$P_j = b_j + 2 \cdot (y_j - y_{ff}) \cdot \sqrt{I+m^2};$$

$$R_j = \frac{A_j}{P_j};$$

$$K_j = k \cdot A \cdot P_j^{2/3};$$

$$S_{ff} = \frac{Q_j^2}{K_j^2}.$$

unde b este lățimea la fund a canalului, B – lățimea la luciul apei, m – coeficientul unghiular al taluzului, A – aria secțiunii transversale, P – perimetrul ud, R – raza hidraulică, k – coeficient de frecare datorat rugozității (după Strickler), iar K – debitanta.

Pentru efectuarea automată a calculelor s-a întocmit un program de calcul, pe baza relațiilor descrise anterior, alegând un pas de calcul temporal $\Delta t = 100$ s, pasul spațial $\Delta x = 1000$ m (rezultând un număr $n = 11$ noduri de calcul), timpul total de calcul fiind $T_{max} = 10800$ s.

Rezultatele sunt prezentate sub formă numerică în (tab. 17.1), iar sub formă grafică în (fig. 17.11). și (fig. 17.12).

Variația debitelor și cotelor în secțiunile de calcul

Tabelul 17.1

Timp (s)	Debit Q (mc/s)			Cotă (m)		
	j = 0	j = 5	j = 10	j = 0	j = 5	j = 10
0	1	2	3	4	5	6
0	5	2,876	3,005	100,722	95,619	90,625
100	5,056	3,243	2,975	100,764	95,635	90,622
200	5,111	3,02	3,039	100,853	95,623	90,629
300	5,167	3,017	2,976	100,835	95,639	90,622
400	5,222	2,815	3,028	100,84	95,617	90,628
500	5,278	2,809	2,968	100,833	95,616	90,621
600	5,333	2,903	2,991	100,855	95,606	90,624
700	5,389	3,031	2,986	100,865	95,613	90,623
800	5,444	3,103	3,016	100,87	95,624	90,627
900	5,5	3,14	3,026	100,872	95,636	90,628
1000	5,556	3,16	3,027	100,879	95,642	90,628
1100	5,611	3,181	3,009	100,889	95,644	90,626
1200	5,667	3,17	2,989	100,895	95,643	90,624
1300	5,722	3,112	2,974	100,897	95,641	90,622
1400	5,778	3,025	2,969	100,899	95,636	90,621
1500	5,833	2,943	2,973	100,905	95,629	90,622
1600	5,889	2,879	2,985	100,913	95,62	90,623
1700	5,944	2,823	3,001	100,919	95,612	90,625
1800	6	2,765	3,018	100,923	95,604	90,627
1900	6,056	2,717	3,031	100,926	95,598	90,629
2040	6,111	2,693	3,037	100,931	95,593	90,629
2100	6,167	2,7	3,036	100,938	95,59	90,629
2200	6,222	2,728	3,029	100,943	95,59	90,628
2300	6,278	2,771	3,017	100,947	95,592	90,627
2400	6,333	2,83	3,002	100,951	95,597	90,625
2500	6,389	2,907	2,985	100,956	95,604	90,623
2600	6,444	3,004	2,969	100,961	95,614	90,621
2700	6,5	3,116	2,956	100,966	95,625	90,62
2800	6,556	3,235	2,949	100,971	95,637	90,619
2900	6,611	3,36	2,947	100,975	95,651	90,618
3000	6,667	3,491	2,952	100,98	95,665	90,619
3100	6,722	3,629	2,961	100,985	95,68	90,62
3200	6,778	3,769	2,976	100,99	95,695	90,622
3300	6,833	3,908	2,995	100,994	95,71	90,624
3400	6,889	4,044	3,016	100,998	95,724	90,627

Tabelul 17.1 (continuare)

0	1	2	3	4	5	6
3500	6,944	4,178	3,037	101,003	95,738	90,629
3600	7	4,309	3,057	101,008	95,752	90,632
3700	7	4,439	3,073	101,01	95,766	90,634
3800	7	4,558	3,087	101,012	95,778	90,635
3900	7	4,678	3,093	101,013	95,791	90,636
4000	7	4,793	3,095	101,013	95,802	90,636
4100	7	4,906	3,09	101,013	95,814	90,636
4200	7	5,013	3,078	101,014	95,825	90,634
4300	7	5,113	3,06	101,014	95,835	90,632
4400	7	5,208	3,036	101,014	95,845	90,629
4500	7	5,299	3,006	101,014	95,854	90,626
4600	7	5,388	2,973	101,015	95,862	90,622
4700	7	5,475	2,939	101,015	95,871	90,617
4800	7	5,56	2,903	101,015	95,879	90,613
4900	7	5,645	2,869	101,015	95,887	90,609
5000	7	5,728	2,838	101,015	95,894	90,605
5100	7	5,811	2,811	101,015	95,902	90,602
5200	7	5,892	2,79	101,015	95,909	90,599
5300	7	5,971	2,777	101,015	95,916	90,598
5400	7	6,047	2,772	101,015	95,923	90,597
5500	7	6,121	2,777	101,015	95,93	90,598
5600	7	6,192	2,793	101,015	95,937	90,6
5700	7	6,259	2,821	101,015	95,943	90,603
5800	7	6,323	2,86	101,015	95,949	90,608
5900	7	6,383	2,911	101,015	95,954	90,614
6000	7	6,439	2,972	101,015	95,959	90,622
6100	7	6,491	3,044	101,015	95,964	90,63
6200	7	6,539	3,126	101,015	95,969	90,64
6300	7	6,584	3,215	101,015	95,973	90,651
6400	7	6,625	3,313	101,015	95,977	90,662
6500	7	6,663	3,416	101,015	95,981	90,674
6600	7	6,698	3,525	101,015	95,984	90,687
6700	7	6,729	3,637	101,015	95,987	90,699
6800	7	6,758	3,753	101,015	95,99	90,712
6900	7	6,783	3,872	101,015	95,993	90,725
7000	7	6,807	3,992	101,015	95,995	90,738
7100	7	6,828	4,114	101,015	95,997	90,751
7200	7	6,847	4,236	101,015	95,999	90,764

Tabelul 17.1 (continuare)

0	1	2	3	4	5	6
7300	7	6,864	4,358	101,015	96,001	90,777
7400	7	6,879	4,479	101,015	96,002	90,789
7500	7	6,893	4,599	101,015	96,004	90,801
7600	7	6,905	4,718	101,015	96,005	90,813
7700	7	6,916	4,835	101,015	96,006	90,824
7800	7	6,926	4,949	101,015	96,007	90,836
7900	7	6,935	5,061	101,015	96,008	90,846
8000	7	6,942	5,171	101,015	96,009	90,857
8100	7	6,949	5,277	101,015	96,009	90,867
8200	7	6,955	5,38	101,015	96,01	90,877
8300	7	6,96	5,479	101,015	96,011	90,886
8400	7	6,965	5,575	101,015	96,011	90,895
8500	7	6,969	5,667	101,015	96,012	90,903
8600	7	6,973	5,755	101,015	96,012	90,911
8700	7	6,976	5,839	101,015	96,012	90,919
8800	7	6,979	5,92	101,015	96,013	90,926
8900	7	6,982	5,996	101,015	96,013	90,933
9000	7	6,984	6,068	101,015	96,013	90,939
9100	7	6,986	6,137	101,015	96,013	90,945
9200	7	6,988	6,201	101,015	96,013	90,951
9300	7	6,989	6,262	101,015	96,014	90,956
9400	7	6,991	6,319	101,015	96,014	90,961
9500	7	6,992	6,372	101,015	96,014	90,965
9600	7	6,993	6,422	101,015	96,014	90,97
9700	7	6,994	6,469	101,015	96,014	90,974
9800	7	6,995	6,513	101,015	96,014	90,977
9900	7	6,995	6,553	101,015	96,014	90,981
10000	7	6,996	6,591	101,015	96,014	90,984
10100	7	6,997	6,626	101,015	96,014	90,987
10200	7	6,997	6,658	101,015	96,015	90,99
10300	7	6,997	6,688	101,015	96,015	90,992
10400	7	6,998	6,715	101,015	96,015	90,994
10500	7	6,998	6,741	101,015	96,015	90,997
10600	7	6,998	6,764	101,015	96,015	90,999
10700	7	6,998	6,785	101,015	96,015	91
10800	7	6,999	6,805	101,015	96,015	91,002

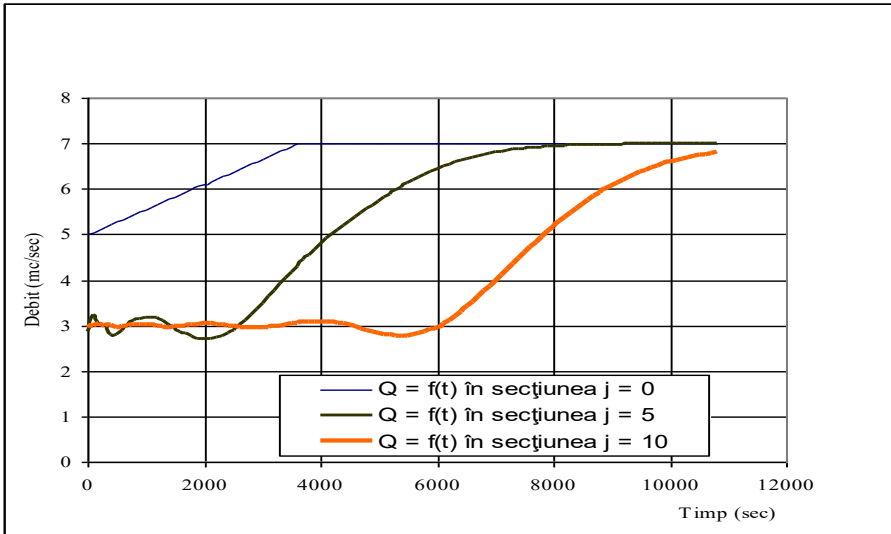


Fig. 17.11. Variația debitului în canal, $Q = f(t)$, în secțiunile $j = 0$ (amonte, $L = 0$), $j = 5$ ($L = 5$ km) și $j = 10$ (aval, $L = 10$ km)

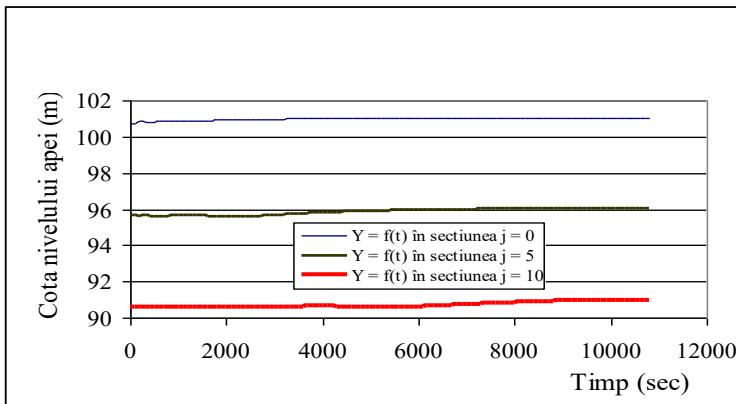


Fig. 17.12. Variația cotelor suprafețelor libere ale apei, $y = f(t)$ în secțiunile $j = 0$ (amonte, $L = 0$), $j = 5$ ($L = 5$ km) și $j = 10$ (aval, $L = 10$ km)

Metoda implicită în patru puncte implică determinarea – prin identificare - a coeficienților ecuațiilor algebrice liniare (17.38) și (17.39) și rezolvarea sistemului format din aceste ecuații. Rezolvarea sistemului format din ecuațiile (17.38) și (17. 39) se poate face relativ ușor prin algoritmul dublului baleiaj, însă condițiile limită trebuie liniarizate în aceeași termeni Δy și ΔQ .

Pentru exemplul de calcul ales (care respectă ipotezele modelului unidimensional) pentru un coeficient de pondere temporal $\theta = 0,7$ și un coeficient de pondere spațial $\varphi = 0,5$, algoritmul numeric a fost stabil indiferent de pasul spațial și temporal ales în calcul. De fapt pentru $\theta = 0,7$ algoritmul este la limită stabil, pentru $\theta < 0,67$ algoritmul devine instabil numeric.

Dificultatea metodei constă în faptul ca liniarizarea ecuațiilor și a condițiilor limită precum și determinarea coeficienților ecuațiilor liniarizate, este relativ greoaie și destul de laborioasă.

2^o. Să se determine *prin metoda explicită* parametri hidraulici, din 1000 în 1000 m (debite, viteze, adâncimi), de-a lungul unui canal de secțiune dreptunghiulară având următoarele caracteristici: lățimea la bază a canalului: $b = 5,0$ m, panta longitudinală a canalului: $S_0 = 0,001$, coeficientul de rugozitate după Manning $n = 0,02$, lungimea canalului: $L = 6$ km.

Hidrograful afluent în canal este redat în (fig. 17.13) și are următoarele caracteristici: $Q_{min} = 8,249$ m³/s, $Q_{max} = 50$ m³/s, cu timpul de creștere a debitului $t_u = 1200$ s, timp de descreștere $t_c = 3600$ s, după o lege liniară.

Rezolvare. După metoda descrisă la pct. 17.5.3., pentru canalul de secțiune dreptunghiulară, ecuațiile se rescriu în diferențe finite astfel:

- pentru adâncimi:

$$h_i^{j+1} = h_i^j + \frac{\Delta t}{2\Delta x} [V_i^j(h_{i-1}^j - h_{i+1}^j) + h_i^j(V_{i-1}^j - V_{i+1}^j)]$$

- pentru viteze:

$$V_i^{j+1} = \frac{I}{2} [-\Gamma + (\Gamma^2 + 4\Gamma\beta)^{1/2}]$$

$$\text{cu } \beta = \left[V_i^j + \frac{\Delta t}{2\Delta x} V_i^j (V_{i-1}^j - V_{i+1}^j) + \frac{g\Delta t}{2\Delta x} (h_{i-1}^j - h_{i+1}^j) + g\Delta t S_0 \right] \text{ și } \Gamma = \frac{(R_{hi}^{j+1})^{4/3}}{n^2 g \Delta t}$$

Condiții inițiale: la ($t = 0$) s-a considerat mișcarea permanentă și uniformă, corespunzătoare debitului $Q_0 = Q_{min} = 8,249$ m³/s, $V = \frac{I}{n} R_h^{2/3} S_0^{1/2}$, rezultând adâncimea normală $h_n = 1,2$ m.

Condițiile limită în amonte s-au ales de forma $Q = Q(t)$, (fig. 17.13), iar *în aval* s-a considerat de asemenea mișcare permanentă, debitul în secțiunea aval rezultând din ecuația de continuitate:

$$Q_i^{j+1} = V_i^{j+1} A_i^{j+1}.$$

Pentru efectuarea automată a calculelor s-a întocmit deasemenea un program de calcul, pe baza relațiilor descrise anterior alegând un pas de calcul temporal $\Delta t = 1$ s, pasul spațial $\Delta x = 100$ m (rezultând un număr $n = 61$ secțiuni de calcul), timpul total de calcul fiind $T_{max} = 15000$ s.

Viteza medie a apei în canal este $V = 1,3748$ m/s, celeritatea undelor de gravitație $c = 3,4310$ m/s, pasul temporal pentru care este asigurată stabilitatea algoritmului fiind $\Delta t_{min} = 10,4039$ s.

Rezultatele sub formă grafică sunt prezentate în continuare (fig. 17.13 la 17.24).

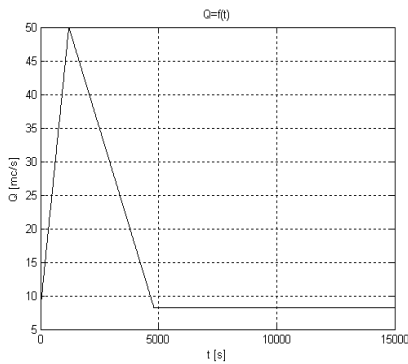


Fig. 17.13. Condiție limită amonte.
Hidrograful afluent în canal

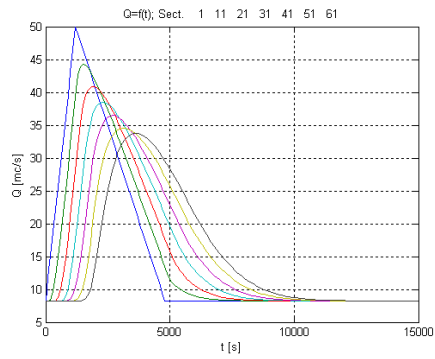


Fig. 17.14. Variația debitului în secțiunile
de calcul

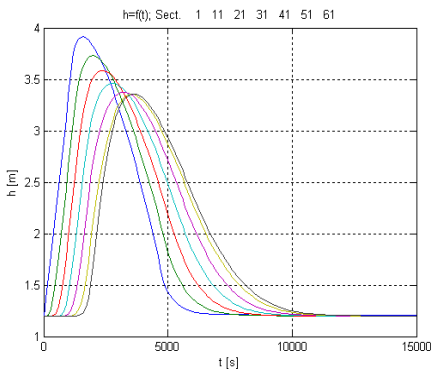


Fig. 17.15. Variația adâncimii apei în timp
în secțiunile de calcul

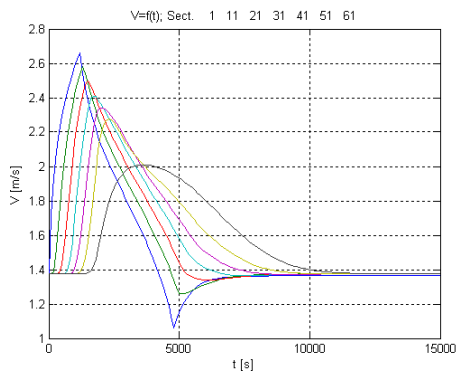


Fig. 17.16. Variația vitezei în timp
în secțiunile de calcul

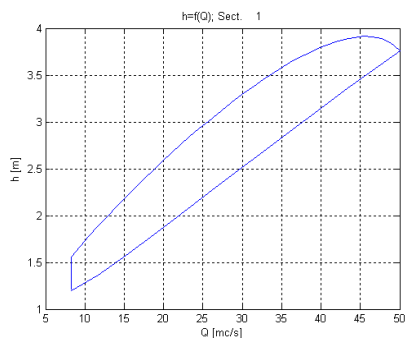


Fig. 17.17 Variația adâncimii apei în funcție de debit în secțiunea 1 ($L = 0$)

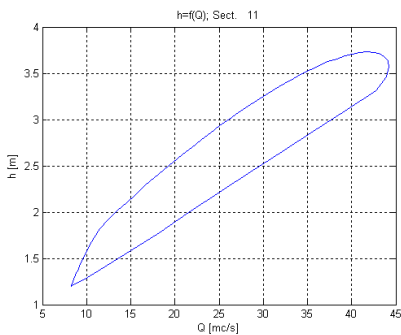


Fig. 17.18 Variația adâncimii apei în funcție de debit în secțiunea 11 ($L = 1$ km)

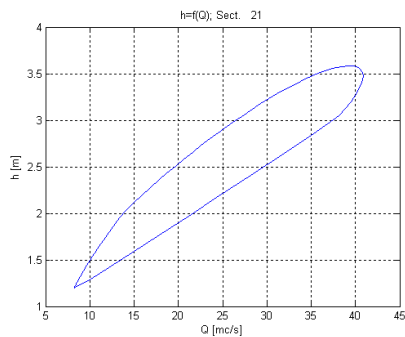


Fig. 17.19 Variația adâncimii apei în funcție de debit în secțiunea 21 ($L = 2$ km)

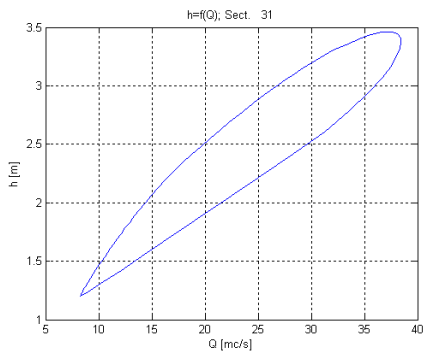


Fig. 17.20 Variația adâncimii apei în funcție de debit în secțiunea 31 ($L = 3$ km)

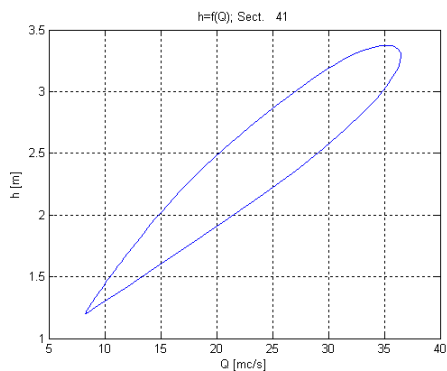


Fig. 17.21. Variația adâncimii apei în

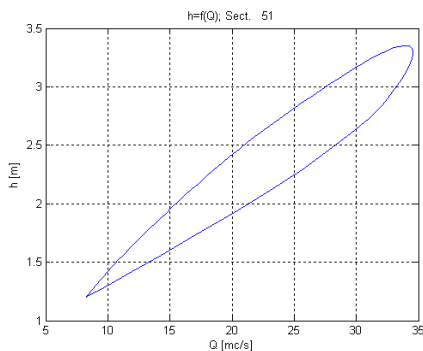


Fig. 17.22. Variația adâncimii apei în

funcție de debit în secțiunea 41 ($L = 4$ km)
km)

funcție de debit în secțiunea 51 ($L = 5$ km)

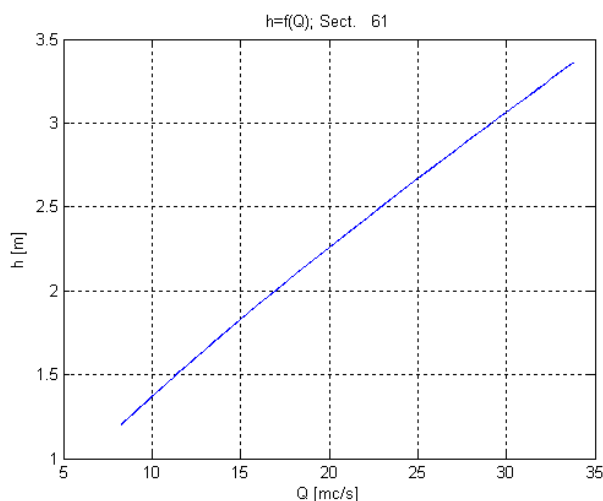


Fig. 17.23. Condiția limită aval: $Q_i^{j+1} = V_i^{j+1} A_i^{j+1}$. Variația adâncimii apei în funcție de debit în aval (secțiunea 61; $L = 6$ km)

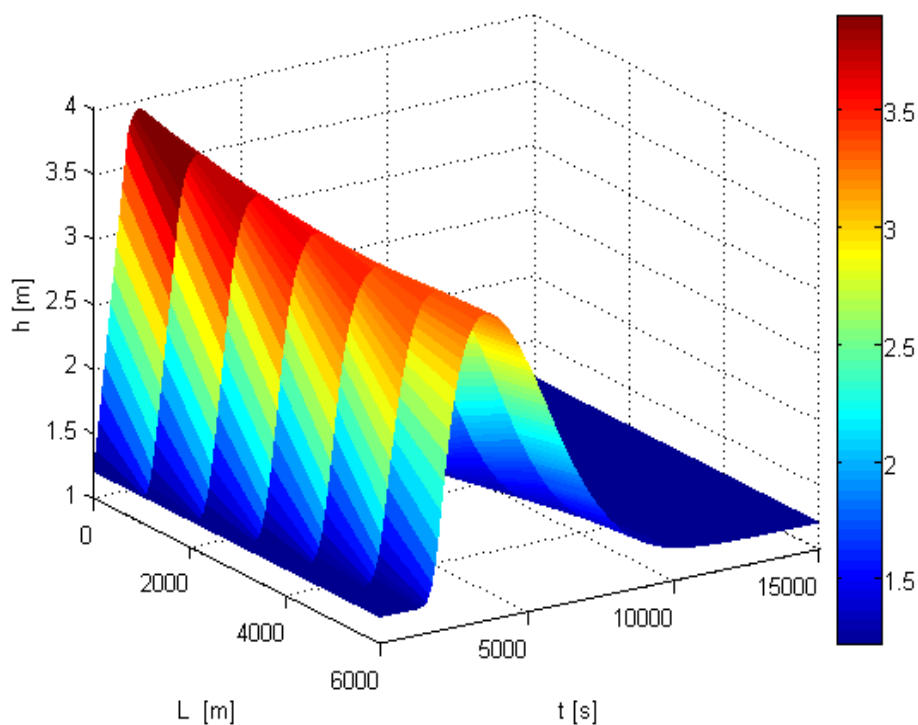


Fig. 17.24. Variația adâncimii apei în timp și în lungul canalului

Metoda explicită, deși permite determinarea variabilelor dependente funcție de variabilele dependente de la momentul de timp trecut, este supusă criteriului de stabilitate.

Din acest motiv, deși atractivă din punct de vedere al programării, rularea programului durează mult. Acest impediment poate fi surmontat prin utilizarea unor calculatoare de mare putere.

Nu s-au observat nici un fel de fenomene de instabilitate numerică a algoritmului (pentru pașii spațiali și temporali aleși), ceea ce recomandă această metodă pentru analiza parametrilor hidraulici în cazul mișcării nepermanente în canale deschise.

Metodele prezentate și programele realizate pot fi utilizate, de asemenea, în calculele de propagare ale viiturilor pe albie naturale, precum și în analiza fenomenelor hidraulice de pe albie cu diverse construcții hidrotehnice.